Matematická analýza 1 - Cvičení 12

Jan Soukup

9.5.2022

1 Opakování

Definice 1. *Nechť* $-\infty \le a < b \le +\infty$ *a* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *je daná funkce. Pokud má funkce* $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *na* (a,b) *derivaci a ta se rovná* $f(x)$*, tj.* $F'(x) = f(x)$ *pro každé* $x \in (a,b)$*, řekneme, že* F je na intervalu (a,b) primitivní funkcí k funkci f.

Tvrzení 1 (Linearita integrálu)**.**

$$\int af + bg = a\int f + b\int g.$$

Tvrzení 2 (Integrace per partes)**.** Nechť jsou funkce f a g spojité na intervalu (a,b) a funkce F a G jsou k nim na (a,b) primitivní. Potom i funkce fG a Fg mají na (a,b) primitivní funkce a na (a,b) platí identita

$$\int f(x)G(x)\ dx + \int F(x)g(x)\ dx = F(x)G(x) + c,$$

tj. součet funkce primitivní k fG a funkce primitivní k Fg je až na aditivní konstantu roven funkci FG.

Tvrzení 3 (O substituci)**.** Buďte dány funkce $\varphi\colon (\alpha,\beta) \to (a,b)$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, přičemž φ má na (α,β) vlastní derivaci. Nechť je funkce $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ na intervalu (a,b) primitivní k funkci f. Pak na intervalu (α,β) platí, že

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = F(\varphi(t)) + c.$$

Definice 2 (Newtonův integrál)**.** *Předpokládejme, že máme dáno* $a, b \in \mathbb{R}$*, kde* $a < b$*. Funkce* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *má na intervalu* (a,b) Newtonův integrál*, když má na* (a,b) *primitivní funkci* F *a ta má vlastní jednostranné limity*

$$F(a^+) = \lim_{x\to a^+} F(x) \quad a \quad F(b^-) = \lim_{x\to b^-} F(x).$$

Symbolem $[F]_a^b$ *označme rozdíl* $F(b^-) - F(a^+)$. Newtonův integrál *funkce* f *na intervalu* (a,b) *pak definujeme jako*

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx := [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Tvrzení 4 (Substituce pro určitý integrál)**.** Nechť $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má ve všech bodech otevřeného intervalu (α,β) vlastní derivaci. Označme $J := \varphi((\alpha,\beta)) = \{\varphi(t);\ t \in (\alpha,\beta)\}$. Ze spojitosti φ na $[\alpha,\beta]$ plyne, že J je omezený interval. Nechť f je funkce spojitá na J a newtonovsky integrovatelná na vnitřku J. Potom

$$(N)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (N)\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx,$$

speciálně tedy levá i pravá strana existuje.

Definice 3 („Známé primitivní funkce“)**.**

(a) $\int x^a = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$ *pro* $a \neq -1$

(b) $\int \frac{1}{x} = \ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}^+$ *nebo* $x \in \mathbb{R}^-$

(c) $\int \cos(x) = \sin(x)$

(d) $\int \sin(x) = -\cos(x)$

(e) $\int e^x = e^x$

(f) $\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$

(g) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)\ , x \in (-1,1)$

2 Příklady

Příklad 1. Spočítejte

(a) $\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}\, dx$

(b) $\int \frac{x+3}{x^2+x-2}\, dx$

Příklad 2. Spočítejte

(a) $\int_0^1 x \operatorname{arctg}(x)\, dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3(x) \sin(x)\, dx$

(c) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx$

(d) $\int_0^2 \frac{x}{(1+2x^2)^2}\, dx$

(e) $\int_{-1}^1 |x|\, dx$

(f) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

(g) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$

Příklad 3. Spočítejte

(a) plochy pod parabolou $y = x^2$ na intervalu $[0, t]$, kde $t \in \mathbb{R}$.

(b) plochy mezi křivkami $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ a $x = 2$.

Příklad 4. Spočítejte

(a) $\int |x|\, dx$

(b) $\int |x^2-1|\, dx$

(c) $\int x^2 \arccos(x)\, dx$

(d) $\int \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\, dx$

(e) $\int \frac{(2x^2-1)}{x^3-x^2}\, dx$