Matematická analýza 1 - Cvičení 11

Jan Soukup

2.5.2022

1 Opakování

Definice 1. *Nechť* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *a* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *je daná funkce. Pokud má funkce* $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *na* (a,b) *derivaci a ta se rovná* $f(x)$*, tj.* $F'(x) = f(x)$ *pro každé* $x \in (a,b)$*, řekneme, že* F je na intervalu (a,b) primitivní funkcí k funkci f.

Definice 2 (Linearita integrálu)**.**

$$\int af + bg = a\int f + b\int g.$$

Definice 3 (Integrace per partes)**.** *Nechť jsou funkce* f *a* g *spojité na intervalu* (a,b) *a funkce* F *a* G *jsou k nim na* (a,b) *primitivní. Potom i funkce* fG *a* Fg *mají na* (a,b) *primitivní funkce a na* (a,b) *platí identita*

$$\int f(x)G(x)\,dx + \int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x) + c,$$

tj. součet funkce primitivní k fG *a funkce primitivní k* Fg *je až na aditivní konstantu roven funkci* FG*.*

Tvrzení 1 (O substituci)**.** Buďte dány funkce $\varphi\colon (\alpha,\beta) \to (a,b)$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, přičemž φ má na (α,β) vlastní derivaci. Nechť je funkce $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ na intervalu (a,b) primitivní k funkci f. Pak na intervalu (α,β) platí, že

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c.$$

Definice 4 („Známé primitivní funkce“)**.**

(1) $\displaystyle\int x^a = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ *pro* $a \neq -1$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x} = \ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}^+$ *nebo* $x \in \mathbb{R}^-$

(3) $\displaystyle\int \cos(x) = \sin(x)$

(4) $\displaystyle\int \sin(x) = -\cos(x)$

(5) $\displaystyle\int e^x = e^x$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)\ , x \in (-1,1)$

2 Příklady

Příklad 1. Najdete k následujícím funkcím jejich primitivní funkce (pro danou $f(x)$ najděte $F(x)$ takovou, že $F'(x) = f(x)$).

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

(b) $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$

(c) $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$

(d) $f(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2}$

(e) $f(x) = x\sin(x)$

(f) $f(x) = xe^x$

(g) $f(x) = \ln(x)$

(h) $f(x) = x^3e^x$

(i) $f(x) = \sin(x)e^x$

Příklad 2. Spočítejte pomocí substituční metody.

(a) $\displaystyle\int e^x \sin(e^x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int \mathrm{tg}(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

Příklad 3. Spočítejte

(a) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x-2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{-3x+3}{x^2+2x+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2-2x+5}\,dx$

Příklad 4. Spočítejte

(a) $\displaystyle\int x^2 \arccos(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int \mathrm{arctg}(\sqrt{x})\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{(2x^2-1)}{x^3-x^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int |x|\,dx$