

# Matematická analýza 1 - Úkol 3

Jan Soukup

odevzdat do 25.4.2022

**Příklad 1** (2 body). Určete následující limity (nebo dokažte, že neexistují). Nepoužívejte l'Hospitalova pravidlo.

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{1}{3x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1-x}}$

**Příklad 2** (2 body). Rozhodněte zda jde funkce  $\frac{\sin x}{e^x - 1}$  spojitě dodefinovat na celé  $\mathbb{R}$ . Pokud ano, udělejte to.

**Příklad 3** (2 body). Dokažte následující variantu věty o složené funkci.

Nechť  $A, B, C \in \mathbb{R}^*$ , nechť  $g(x)$  je funkce splňující  $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$  a  $f(x)$  je funkce splňující  $\lim_{x \rightarrow B^+} f(x) = C$ . Navíc nechť na nějakém prstencovém okolí  $P(A, \delta)$  funkce  $g(x)$  je větší než  $B$ . Pak  $\lim_{x \rightarrow A} f(g(x)) = C$ .

(Hint: Postupujte podobně, jako u důkazy věty o složené funkci z přednášky)

**Příklad 4.** (4 body) Určete, kde derivace následujících funkcí existují a spočítejte je. Nemusíte počítat jednostranné derivace v krajních bodech.

(1)  $\ln(|x|)$

(2)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3+x} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$

(3)  $5x^{101} + 6 \cos(x^2) - \frac{5}{x^5}$

(4)  $\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$