Matematická analýza 1 - Cvičení 9

Jan Soukup

11.4.2022

1 Opakování

Tvrzení 1 (Základní pravidla pro derivace)**.**

(1) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

(2) $(fg)' = f'g + fg'$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

(4) $(f(g))' = f'(g)g'$

Tvrzení 2 (Derivace základních funkcí)**.**

(1) $(x^n)' = nx^{n-1}$

(2) $(e^x)' = e^x$

(3) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

(4) $(\sin(x))' = \cos(x)$

(5) $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Tvrzení 3 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, funkce $f, g\colon P(a,\delta) \to \mathbb{R}$ mají na $P(a,\delta)$ vlastní derivaci a $g'(x) \neq 0$ na $P(a,\delta)$.

(1) Pokud $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$,
pak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.

(2) Pokud $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.

Totéž platí pro jednostranné limity $x \to a^-$ a $x \to a^+$.

Definice 1 (Taylorův polynom)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, nechť $n \in \mathbb{N}_0$ a nechť f je funkce definovaná na okolí a, která má v a vlastní n-tou derivaci $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pokud $n = 0$, předpokládejme i spojitost f v a.* Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a *rozumíme polynom*

$$\begin{aligned} T_n^{f,a}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Tvrzení 4 (Lagrangeův odhad zbytku)**.** Nechť f je funkce, která má na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ vlastní derivaci řádu $n+1$ (a tím pádem i spojité vlastní derivace všech nižších řádů). Volme $a, b \in I$, kde $a \neq b$. Potom existuje bod c ostře mezi a a b takový, že platí

$$R_n^{f,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{1}$$

Speciálně pro $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ ležící ostře mezi body a a b platí $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, máme odhad

$$|R_n^{f,a}(b)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}. \tag{2}$$

2 Příklady

Příklad 1. Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítejte následující limity

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} x - \ln(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$

Příklad 2. Určete lokální extrémy následujících funkcí

(1) $x^3 - x$

(2) $\frac{2x}{x^2+1}$

(3) $\ln(|x| - x^2)$

(4) $x^2 \cdot e^{-x}$

Příklad 3. Vyšetřete průběh funkce $\frac{2x}{1-x^2}$ a nakreslete její graf.

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce $\ln(|x| - x^2)$ a nakreslete její graf.

Příklad 5. Dokažte následující tvrzení:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\colon e^x \geq 1 + x$

Příklad 6. Napište Taylorův polynom stupně 5 se středem v nule pro následující funkce.

(a) $f(x) = (1+x)^a$

(b) $f(x) = \sqrt{1+x}$

Příklad 7. Pomocí Taylorova polynomu přibližně spočtěte následující hodnoty a odhadněte chybu.

(a) $\cos(0,1)$

(b) $\sqrt{1,02}$.

Příklad 8. Dokažte následující tvrzení:

(1) $\forall x \in (-1,\infty)\colon\ \ln(x+1) \leq x$

(2) $\forall x \in (-1,\infty)\colon 1 + x \geq e^{\frac{x}{1+x}}$ nebo ekvivalentně $\forall x \in (-1,\infty)\colon\ \ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$

(3) $\forall x \geq 0\colon\ \sin(x) \leq x$

Příklad 9 (*). Spočítejte derivaci následují funkce na $\mathbb{R}$, případně dokažte, že derivace v nějakých bodech neexistuje.

(1) $\sqrt{1 - e^{-x^2}}$