Matematická analýza 1 - Cvičení 8

Jan Soukup

4.4.2022

1 Opakování

Definice 1. *Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $b \in M$ a b je oboustranný limitní bod M.* Derivace funkce f v bodě b *je limita*

$$f'(b) := \lim_{h\to 0} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} = \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Derivace funkce f v bodě a zprava (zleva) *je příslušná jednostranná limita pro $h \to 0^+$ ($h \to 0^-$), resp. $x \to a^+$ ($x \to a^-$). Tyto jednostranné derivace značíme $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.*

Tvrzení 1 (Základní pravidla pro derivace)**.**

(1) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

(2) $(fg)' = f'g + fg'$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

(4) $(f(g))' = f'(g)g'$

Tvrzení 2 (Derivace základních funkcí)**.**

(1) $(x^n)' = nx^{n-1}$

(2) $(e^x)' = e^x$

(3) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

(4) $(\sin(x))' = \cos(x)$

(5) $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Tvrzení 3 (Derivace inverzní funkce)**.** Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $a \in J$ jeho vnitřní bod, $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotónní funkce (tj. rostoucí nebo klesající) a $f(a) = b$. Pak

(1) Když má f v a nenulovou derivaci $f'(a)$, potom inverzní funkce $f^{<-1>}$ má v b derivaci

$$\left(f^{<-1>}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{<-1>}(b)\right)}.$$

(2) Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající), potom $\left(f^{<-1>}\right)'(b) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Tvrzení 4 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, funkce $f, g\colon P(a,\delta) \to \mathbb{R}$ mají na $P(a,\delta)$ vlastní derivaci a $g'(x) \neq 0$ na $P(a,\delta)$.

(1) Pokud $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$,
pak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.

(2) Pokud $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.

Totéž platí pro jednostranné limity $x \to a^-$ a $x \to a^+$.

2 Příklady

Příklad 1. Spočítejte z definice derivaci funkce $\frac{1}{x^2}$ pro každý bod $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 2. Spočítejte derivace následujících funkcí:

(1) $3x^2 - 25x + 50$

(2) x^r, $r \in \mathbb{R}$, pro $x > 0$

(3) $\sin(x^5)$

(4) $\ln(\frac{x-1}{x+1})$ na $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

(5) $\sin(x)\cos(x)$

(6) $x \cdot |x|$

(7) $\sin(\cos(x))$

(8) x^x na $\mathbb{R}^+$

(9) $x^2 e^{-x^2}$

(10) $\tan(x)$, kde $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}$

Příklad 3. Spočítejte derivaci podle věty o derivaci inverzní funkce

(1) $\ln(x)$ na $\mathbb{R}^+$

(2) $\sqrt{x}$ na $\mathbb{R}^+$ bez použití obecného vzorce pro x^r

(3) $\arcsin(x)$ na intervalu $(-1, 1)$

(4) $\arccos(x)$ na intervalu $(-1, 1)$

Příklad 4. Určete hodnotu derivace následující funkce na celém $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

Příklad 5. Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítejte následující limity

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$

Příklad 6. Určete lokální extrémy následujících funkcí

(1) $x^3 - x$

(2) $x^2 \cdot e^{-x}$

Příklad 7 (*)**.** Spočítejte derivaci následují funkce na $\mathbb{R}$, případně dokažte, že derivace v nějakých bodech neexistuje.

(1) $\sqrt{1 - e^{-x^2}}$

(2) $\min\{x, x^2, x^3\}$