Matematická analýza 1 - Cvičení 7

Jan Soukup

28.3.2022

1 Opakování

Definice 1. *Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$, pokud.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in P(a, \delta) \implies f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

Tvrzení 1 (Heineho definice limity funkce)**.** Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí $P(b, \Delta)$ bodu $b \in \mathbb{R}^*$ pro nějaké $\Delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\lim_{x \to b} f(x) = L$;

(2) pro každou posloupnost $(x_n) \subseteq P(b, \Delta)$, pro níž platí $\lim_{n \to \infty} x_n = b$, platí také $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Tvrzení 2 (Limita složené funkce)**.** Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, nechť $g(x)$ je funkce splňující $\lim_{x \to A} g(x) = B$ a $f(x)$ je funkce splňující $\lim_{x \to B} f(x) = C$. Navíc nechť je splněna aspoň jedna z podmínek P1 a P2:

P1. Funkce $f(x)$ je spojitá v B (jinými slovy, $f(B) = \lim_{x \to B} f(x) = C$).

P2. Na nějakém prstencovém okolí $P(A, \eta)$ funkce $g(x)$ nenabývá hodnotu B, tj. $B \notin g(P(A, \eta))$.

Potom

$$\lim_{x \to A} f(g(x)) = C.$$

Definice 2. *Nechť $f \colon M \to \mathbb{R}$, $b \in M$ a b je oboustranný limitní bod M.* Derivace funkce f v bodě b *je limita*

$$f'(b) := \lim_{h \to 0} \frac{f(b + h) - f(b)}{h} = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Derivace funkce f v bodě a zprava (zleva) *je příslušná jednostranná limita pro $h \to 0^+$ ($h \to 0^-$), resp. $x \to a^+$ ($x \to a^-$). Tyto jednostranné derivace značíme $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.*

Tvrzení 3 (Základní pravidla pro derivace)**.**

(1) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

(2) $(fg)' = f'g + fg'$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

(4) $(f(g))' = f'(g)g'$

Tvrzení 4 (Derivace základních funkcí)**.**

(1) $(x^n)' = nx^{n-1}$

(2) $(e^x)' = e^x$

(3) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

(4) $(\sin(x))' = \cos(x)$

(5) $(\cos(x))' = -\sin(x)$

2 Příklady

V následujících úlohách můžete používat následující limity, které si dokážeme později. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Příklad 1. Spočítejte limity, nebo ukažte, že limita neexistuje:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(3) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\sin x}$

Příklad 2. Určete limitu posloupnosti $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$.

Příklad 3. Rozhodněte, zdali následující funkce můžeme spojitě dodefinovat na celé množině $\mathbb{R}$.

(a) $\frac{1}{x-8}$

(b) $\frac{\sin(x)}{x}$

(c) $\frac{1}{x^2}$

Příklad 4. Spočítejte z definice derivaci funkce $\frac{1}{x^2}$ pro každý bod $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 5. Spočítejte derivace následujících funkcí:

(1) $3x^2 - 25x + 50$

(2) $\sin(x^5)$

(3) $\sin(x)\cos(x)$

(4) $(\sin(x))^3$

(5) $\sin(\cos(x))$

(6) x^x na $\mathbb{R}^+$

Příklad 6 (*). Spočítejte derivace následujících funkcí:

(1) $\arcsin(x)$ na intervalu $(-1, 1)$

(2) $x^2 e^{-x^2}$

(3) $\arcsin(\sin(x))$ pro $x \in \mathbb{R}$ (vyjdou různé hodnoty v závislosti na x)