

# Matematická analýza 1 - Cvičení 6

Jan Soukup

21.3.2022

## 1 Opakování

**Definice 1.** Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $a \in \mathbb{R}^*$  limitu  $L \in \mathbb{R}^*$ , pokud.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in P(a, \delta) \implies f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

**Tvrzení 1** (Heineho definice limity funkce). Nechť  $f$  je funkce definovaná na prstencovém okolí  $P(b, \Delta)$  bodu  $b \in \mathbb{R}^*$  pro nějaké  $\Delta > 0$ . Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(1)  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$ ;

(2) pro každou posloupnost  $(x_n) \subseteq P(b, \Delta)$ , pro níž platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , platí také  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ .

**Tvrzení 2** (Aritmetika limit funkcí). Nechť  $a, A, B \in \mathbb{R}^*$ , nechť  $f$  a  $g$  jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí  $P(a, \Delta)$  bodu  $a$ , a nechť platí  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ . Potom

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = A + B$ , je-li tento součet definován.

(b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$ , je-li tento součin definován.

(c) Nechť je navíc  $g(x)$  nenulová na nějakém prstencovém okolí bodu  $a$ .

Pak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = A/B$ , je-li tento podíl definován.

**Tvrzení 3** (dva funkční strážníci). Nechť  $A, L \in \mathbb{R}^*$ ,  $A$  je limitní bod množiny  $M \subset \mathbb{R}$  a jsou dány funkce  $f, g, h : M \rightarrow \mathbb{R}$  splňující podmínky, že  $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = \lim_{x \rightarrow A} h(x) = L$  a že pro nějaké  $\delta$  je  $\forall x \in P(A, \delta) \cap M : g(x) \in I(f(x), h(x))$ . Pak též  $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = L$ .

**Tvrzení 4** (Limita složené funkce). Nechť  $A, B, C \in \mathbb{R}^*$ , nechť  $g(x)$  je funkce splňující  $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$  a  $f(x)$  je funkce splňující  $\lim_{x \rightarrow B} f(x) = C$ . Navíc nechť je splněna aspoň jedna z podmínek P1 a P2:

**P1.** Funkce  $f(x)$  je spojitá v  $B$  (jinými slovy,  $f(B) = \lim_{x \rightarrow B} f(x) = C$ ).

**P2.** Na nějakém prstencovém okolí  $P(A, \eta)$  funkce  $g(x)$  nenabývá hodnotu  $B$ , tj.  $B \notin g(P(A, \eta))$ .

Potom

$$\lim_{x \rightarrow A} f(g(x)) = C.$$

## 2 Příklady

V následujících úlohách můžete používat následující limity, které si dokážeme později.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**Příklad 1.** Spočítejte limity, nebo ukažte, že limita neexistuje:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x \cos(x)$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\frac{1}{x}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 1}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x} - \sqrt{x}}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 1}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 2^x)}{x}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 + x \cos(x)}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

**Příklad 2.** Určete limitu posloupnosti  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right)^{\sqrt{n^3 + 3n^2}}$ .

**Příklad 3.** Rozhodněte, zdali následující funkce můžeme spojitě dodefinovat na celé množině  $\mathbb{R}$ .

$$(a) \frac{1}{x - 8}$$

$$(b) \frac{\sin(x)}{x}$$

$$(c) \frac{1}{x^2}$$