Matematická analýza 1 - Cvičení 5

Jan Soukup

14.3.2022

1 Opakování

Definice 1 (Řada a její součet). Nekonečná řada (reálných čísel) *je výraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots ,$$

kde $(a_n)_{n\geq 1}$ *je posloupnost reálných čísel.*

Částečný součet řady*, přesněji její* n*-tý částečný součet* s_n*, je součet jejích prvních* n *členů. Pro řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je tedy* $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *a pro řadu* $\sum_{k\geq 8} c_k$ *je* $s_n = c_8 + c_9 + \cdots + c_{n+7}$.

Pokud existuje vlastní limita posloupnosti (s_n) *částečných součtů dané řady, mluvíme o* konvergentní řadě *a limita* $\lim_{n\to\infty} s_n$ *je jejím* součtem*. Pokud* $\lim s_n$ *neexistuje nebo je nevlastní, je daná řada* divergentní.

Definice 2. *Řekneme, že funkce* f *má v bodě* $a \in \mathbb{R}^*$ *limitu* $L \in \mathbb{R}^*$*, pokud.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in P(a, \delta) \implies f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

Tvrzení 1 (Heineho definice limity funkce). Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí $P(b, \Delta)$ bodu $b \in \mathbb{R}^*$ pro nějaké $\Delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\lim_{x\to b} f(x) = L$;

(2) pro každou posloupnost $(x_n) \subseteq P(b, \Delta)$, pro níž platí $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, platí také $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Tvrzení 2 (Aritmetika limit funkcí). Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, nechť f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí $P(a, \Delta)$ bodu a, a nechť platí $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Potom

(a) $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$, je-li tento součet definován.

(b) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, je-li tento součin definován.

(c) Nechť je navíc $g(x)$ nenulová na nějakém prstencovém okolí bodu a.
Pak $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$, je-li tento podíl definován.

Tvrzení 3 (dva funkční strážníci). Nechť $A, L \in \mathbb{R}^*$, A je limitní bod množiny $M \subset R$ a jsou dány funkce $f, g, h : M \to R$ splňující podmínky, že $\lim_{x\to A} f(x) = \lim_{x\to A} h(x) = L$ a že pro nějaké δ je $\forall x \in P(A, \delta) \cap M : g(x) \in I(f(x), h(x))$. Pak též $\lim_{x\to A} g(x) = L$.

Tvrzení 4 (Limita složené funkce). Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, nechť $g(x)$ je funkce splňující $\lim_{x\to A} g(x) = B$ a $f(x)$ je funkce splňující $\lim_{x\to B} f(x) = C$. Navíc nechť je splněna aspoň jedna z podmínek P1 a P2:

P1. Funkce $f(x)$ je spojitá v B (jinými slovy, $f(B) = \lim_{x\to B} f(x) = C$).

P2. Na nějakém prstencovém okolí $P(A, \eta)$ funkce $g(x)$ nenabývá hodnotu B, tj. $B \notin g(P(A, \eta))$.

Potom

$$\lim_{x\to A} f(g(x)) = C.$$

2 Příklady

Příklad 1. Ukažte, že součet harmonické řady je neomezený, tj. posloupnost součtů $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ má limitu $+\infty$.

Příklad 2. Určete, zdali řada konverguje, nebo diverguje:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5+4}$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Příklad 3. Spočítejte limity následujících funkcí z definice. Případně ukažte, že neexistují (například pomocí Heineho věty/z definice/ jinak):

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-12}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 3} x^2-2$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

V následujících úlohách můžete používat následující limity, které si dokážeme později. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Příklad 4. Spočítejte limity, nebo ukažte, že limita neexistuje:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x\cos(x)}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-3}{2x^2-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$