Matematická analýza 1 - Cvičení 4

Jan Soukup

7.3.2022

1 Opakování

Tvrzení 1 (Aritmetika limit). Nechť $(a_n), (b_n)$ jsou posloupnosti reálných čísel s $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Pak

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$, je-li výraz na pravé straně definován,

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$, je-li výraz na pravé straně definován,

(3) pokud $b_n \neq 0$ pro každé $n > n_0$, pak $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B$, je-li výraz na pravé straně definován.

Tvrzení 2 (O dvou policajtech). Nechť posloupnosti $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ splňují, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a \in \mathbb{R}$ a pro každé $n > n_0$ je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak (c_n) konverguje a $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Definice 1 (Řada a její součet). Nekonečná řada (reálných čísel) *je výraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots ,$$

kde $(a_n)_{n\geq 1}$ *je posloupnost reálných čísel.*

Částečný součet řady, *přesněji její n-tý částečný součet* s_n, *je součet jejích prvních* n *členů. Pro řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je tedy* $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *a pro řadu* $\sum_{k\geq 8} c_k$ *je* $s_n = c_8 + c_9 + \cdots + c_{n+7}$.

Pokud existuje vlastní limita posloupnosti (s_n) *částečných součtů dané řady, mluvíme o* konvergentní řadě *a limita* $\lim_{n\to\infty} s_n$ *je jejím* součtem. *Pokud* $\lim s_n$ *neexistuje nebo je nevlastní, je daná řada* divergentní.

2 Příklady

Příklad 1. Seřaďte následující funkce podle toho, jak rychle rostou n^n, k^n, $n!$, n^k, n. (pro $k > 1$)

Příklad 2. Určete následující limity, pomocí věty o aritmetice limit a věty o dvou strážnících:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$ (rozšiřte zlomek výrazem typu $\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$)

Příklad 3. Určete množinu hromadných bodů posloupnosti

$$a_1 = 1, a_n = \frac{1}{\text{„nejmenší dělitel } n \text{ větší než 1"}}.$$

Příklad 4. Spočtěte limitu posloupnosti (a_n) zadané rekurencí

$$a_{n+1} = \frac{5}{6 - a_n}$$

a první hodnotou $a_1 = 4$.

Příklad 5. Spočtěte limitu posloupnosti (a_n) zadané rekurencí

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1$$

a první hodnotou $a_1 = 0$.

Příklad 6. Ukažte, že součet harmonické řady je neomezený, tj. posloupnost součtů $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ má limitu $+\infty$.

Příklad 7. Určete, zdali řada konverguje, nebo diverguje:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5+4}$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Příklad 8. Dokažte, že pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, potom konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.
Platí tvrzení i pro řady, které konvergují jen neabsolutně?

Příklad 9 (*). Spočítejte limitu následující posloupnosti v závislosti na přirozených parametrech k, l.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l}$$

.

Příklad 10 (*). Pomocí binomické věty a definice $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ dokažte, že $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = e$.