Matematická analýza 1 - Cvičení 3

Jan Soukup

28.2.2022

1 Opakování

Definice 1. *Nechť (a_n) je reálná posloupnost a $L \in R^*$. Pokud*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : n \geq n_0 \implies a_n \in U(L, \varepsilon),$$

řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu L.

$U(L, \varepsilon)$ značí otevřený interval okolo L do vzdálenosti ε, případně interval $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$ pokud $L = \infty$ a podobně pro $L = -\infty$.

Pro konečné L (takové limitě říkáme vlastní) můžeme toto ekvivalentně přepsat jako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : n \geq n_0 \implies L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

Podobně pro $L = \infty$ (takové limitě říkáme nevlastní) to můžeme přepsat jako

$$\forall c > 0\ \exists n_0 : n \geq n_0 \implies c < a_n.$$

Tvrzení 1 (Aritmetika limit)**.** Nechť $(a_n), (b_n)$ jsou posloupnosti reálných čísel s $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Pak

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$, je-li výraz na pravé straně definován,

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$, je-li výraz na pravé straně definován,

(3) pokud $b_n \neq 0$ pro každé $n > n_0$, pak $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B$, je-li výraz na pravé straně definován.

Tvrzení 2 (O dvou policajtech)**.** Nechť posloupnosti $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ splňují, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a \in \mathbb{R}$ a pro každé $n > n_0$ je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak (c_n) konverguje a $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Tvrzení 3 (Bernoulliova nerovnost)**.** Pro každé reálné číslo $x \geq -1$ a celé číslo $n \geq 0$ platí, že

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

2 Příklady

Příklad 1. Určete následující limity, pomocí věty o aritmetice limit:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(4 + \frac{2}{n^2}\right) \cdot \left(5 + \frac{1}{n}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n}{n^2-7n+7}$

Příklad 2. Dokažte pomocí Bernoulliovy nerovnosti, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$.

Příklad 3. Určete následující limity, pomocí věty o aritmetice limit a věty o dvou strážnících (policajtech):

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor n \rfloor}{n}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}$ (Nemůžeme použít aritmetiku limit, použijte strážníky)

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$

(6) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$

(7) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+2^n+3^n}$

(8) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$

(9) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$

Příklad 4. Seřaďte následující funkce podle toho, jak rychle rostou n^n, k^n, $n!$, n^k, n.

Příklad 5. Spočtěte limitu posloupnosti (a_n) zadané rekurencí

$$a_{n+1} = \frac{5}{6-a_n}$$

a první hodnotou $a_1 = 4$.

Příklad 6. Spočtěte limitu posloupnosti (a_n) zadané rekurencí

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1$$

a první hodnotou $a_1 = 0$.

Příklad 7. Nalezněte posloupnosti (a_n) a (b_n), že jedna je podposloupností druhé a naopak, ale $(a_n) \neq (b_n)$.

Příklad 8 (*). Pomocí binomické věty a definice $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{i}\right)^i = e$.