Matematická analýza 1 - Cvičení 2

Jan Soukup

21.2.2022

1 Opakování

Definice 1. *Nechť M je množina s uspořádáním $\succcurlyeq$ a $A \subseteq M$.*

- *Množina A je shora omezená pokud existuje $m \in M$ takové, že $m \succcurlyeq a$ pro každý prvek $a \in A$. Takovému m říkáme horní závora množiny A.*
- *Prvek $m \in M$ je supremum množiny A, pokud m je nejmenší horní závora A. Zapisujeme $m = \sup A$.*
- *Množina A je zdola omezená pokud existuje $m \in M$ takové, že $a \succcurlyeq m$ pro každý prvek $a \in A$. Takovému m říkáme dolní závora množiny A.*
- *Prvek $m \in M$ je infimum množiny A, pokud m je největší dolní závora A. Zapisujeme $m = \inf A$.*

Definice 2. *Nechť (a_n) je reálná posloupnost a $L \in R^*$. Pokud*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : n \geq n_0 \implies a_n \in U(L, \varepsilon),$$

řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu L.

Pro konečné L můžeme toto ekvivalentně přepsat jako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : n \geq n_0 \implies L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

Podobně pro $L = \infty$ to můžeme přepsat jako

$$\forall c > 0\ \exists n_0 : n \geq n_0 \implies c < a_n.$$

2 Příklady

Rozmyslete si, že pokud je prvek maximem nějaké množiny, tak je i supremem. Podobně pro minimum a infimum.

Příklad 1. Určete infima, suprema, minima, maxima následujících množin (pokud existují). Množiny berte jako podmnožiny $\mathbb{R}$:

- $M = \left\{\frac{-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$
- $M = \left\{q \mid q < \sqrt{3}, q \in \mathbb{Q}\right\}$
- $M = \left\{\frac{p}{p+q} \mid p, q \in \mathbb{N}\right\}$
- $M = \left\{n^{(-1)^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

- $M = \left\{\cos((n + \frac{1}{n})\pi) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

Příklad 2. Nechť $p(k, q) = \frac{\lfloor 10^k q \rfloor}{10^k}$, kde $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ pro libovolné $x \in R$. Najděte infimum a supremum množiny $P = \left\{p(n, \frac{4}{3}) \mid n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$, pokud existují najděte i minimum a maximum.

Příklad 3. Pro neprázdné a shora i zdola omezené množiny reálných čísel A a B, se pokuste vyjádřit co nejpřesněji suprema a infima následujících množin pomocí suprem a infim množin A a B.

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A \setminus B$
- $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

Příklad 4. Podle definice určete limitu následujících posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (nebo dokažte, že neexistuje):

(1) $a_n = 1/n$

(2) $a_n = 1/\sqrt{n}$

(3) $a_n = \cos((-1)^n)$

(4) $a_n = (-1)^{n!}$

(5) $a_n = \log n$

(6) $a_n = \frac{1}{1+n^2}$

(7) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

(8) $a_n = \sin(1/n)$

(9) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(10) $a_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$

(11) $a_n = \frac{2^n}{n^n}$

Příklad 5. Nalezněte posloupnosti (a_n) a (b_n), že jedna je podposloupností druhé a naopak, ale $(a_n) \neq (b_n)$.

Příklad 6. Dokažte, že $\mathbb{Q}$ je husté v $\mathbb{R}$, tedy $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(a < b \implies (\exists q \in \mathbb{Q})(a < q \land q < b))$.

Příklad 7. Rozhodněte, zdali jsou následující posloupnosti monotónní a pokud ano, určete, jestli jsou rostoucí, klesající, neklesající nebo nerostoucí.

- $\{2n + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$