Matematická analýza 1 - Cvičení 13

Jan Soukup

16.5.2022

1 Opakování

Definice 1. *Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je daná funkce na netriviálním intervalu. Pokud má funkce $F\colon I \to \mathbb{R}$ na I derivaci a ta se rovná $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$, řekneme, že F* je na intervalu I primitivní funkcí k funkci f.

Definice 2 (obecný Newtonův integrál)**.** *Předpokládejme, že máme dáno $a, b \in \mathbb{R}^*$, kde $a < b$. Funkce $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a,b)* obecný Newtonův integrál*, když má na (a,b) primitivní funkci F a ta má vlastní jednostranné limity*

$$F(a^+) = \lim_{x\to a^+} F(x) \quad a \quad F(b^-) = \lim_{x\to b^-} F(x).$$

Symbolem $[F]_a^b$ označme rozdíl $F(b^-) - F(a^+)$. Newtonův integrál *funkce f na intervalu (a,b) pak definujeme jako*

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx := [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Tvrzení 1 (2. věta o substituci)**.** [O substituci] Buďte dány funkce $g\colon I \to J$ a $f\colon J \to \mathbb{R}$, přičemž g má na I vlastní derivaci. Nechť g je surjekce na a derivace g není na I nulová. Pak platí, že

$$G = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \implies \int f(x) = G(g^{-1}(t)).$$

Tvrzení 2. Necht' $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ má na $[a,b]$ Riemannovsky integrovatelnou derivaci f'. Pak

$$\text{délka}((x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt.$$

Tvrzení 3 (Objem rotačního tělesa)**.** Mějme spojitou funkci $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$. Potom objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce f kolem osy x je roven

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Tvrzení 4 (Povrch pláště rotačního tělesa)**.** Mějme spojitou funkci $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$, která má na tomtu intervalu také spojitou derivaci. Potom povrch pláště tělesa, které vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x je roven

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Tvrzení 5 (Interální kritérium)**.** Necht' $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ je nerostoucí nezáporná funkce. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když platí

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b f < \infty.$$

Definice 3 („Známé primitivní funkce“)**.**

(a) $\int x^a = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ *pro* $a \neq -1$

(b) $\int \frac{1}{x} = \ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}^+ \textit{nebo}\ x \in \mathbb{R}^-$

(c) $\int \cos(x) = \sin(x)$

(d) $\int \sin(x) = -\cos(x)$

(e) $\int e^x = e^x$

(f) $\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$

(g) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)\ , x \in (-1,1)$

2 Příklady

Příklad 1. Spočítejte obsah

(a) plochy pod parabolou $y = x^2$ na intervalu $[0, t]$, kde $t \in \mathbb{R}^+$.

(b) uzavřené plochy mezi křivkami $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ a $x = e$.

(c) plochy pod grafem funkce $y = e^{-|x|}$ na intervalu $(-1, 1)$

(d) uzavřené plochy mezi křivkami $y = 1$ a $y = (x-1)(x-2)(x-3)+1$.

Příklad 2. Spočítejte obvod a obsah(*) jednotkového kruhu.

Příklad 3. Spočítejte délku křivky $y = \sqrt{x^3}$ na intervalu $[0, 1]$.

Příklad 4. Spočítejte povrch a objem jednotkové koule.

Příklad 5. Spočítejte povrch pláště a objem

(a) válce s výškou h a poloměrem podstavy r

(b) kužele s výškou h a poloměrem podstavy r

Příklad 6. Rozhodněte zda následující řady konvergují, či divergují

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(n)}$

Příklad 7. (*) Najděte primitivní funkci na intervalu $(0, \pi)$ k

$$\frac{1}{\sin(x)}$$