Matematická analýza 1 - Cvičení 12

Jan Soukup

9.5.2022

1 Opakování

Definice 1. *Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je daná funkce na netriviálním intervalu. Pokud má funkce $F\colon I \to \mathbb{R}$ na I derivaci a ta se rovná $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$, řekneme, že F* je na intervalu I primitivní funkcí k funkci f.

Definice 2 (Linearita integrálu)**.**

$$\int af + bg = a\int f + b\int g.$$

Definice 3 (Integrace per partes)**.** *Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval a $f, g, F, G : I \to R$ jsou takové funkce, že F je primitivní k f a G ke g. Potom platí identita*

$$\int f(x)G(x)\ dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\ dx + c,$$

tj. součet funkce primitivní k fG a funkce primitivní k Fg je až na aditivní konstantu roven funkci FG.

Tvrzení 1 (O substituci)**.** Buďte dány funkce $\varphi\colon I \to J$ a $f\colon J \to \mathbb{R}$, přičemž φ má na I vlastní derivaci. Nechť je funkce $F\colon J \to \mathbb{R}$ na intervalu J primitivní k funkci f. Pak na intervalu I platí, že

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = F(\varphi(t)) + c.$$

Tvrzení 2 (2. věta o substituci)**.** [O substituci] Buďte dány funkce $g\colon I \to J$ a $f\colon J \to \mathbb{R}$, přičemž g má na I vlastní derivaci. Nechť g je surjekce na a derivace g není na I nulová. Pak platí, že

$$G = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \implies \int f(x) = G(g^{-1}(t)).$$

Definice 4 (obecný Newtonův integrál)**.** *Předpokládejme, že máme dáno $a, b \in \mathbb{R}^*$, kde $a < b$. Funkce $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a, b)* obecný Newtonův integrál*, když má na (a, b) primitivní funkci F a ta má vlastní jednostranné limity*

$$F(a^+) = \lim_{x\to a^+} F(x) \quad a \quad F(b^-) = \lim_{x\to b^-} F(x).$$

Symbolem $[F]_a^b$ označme rozdíl $F(b^-) - F(a^+)$. Newtonův integrál *funkce f na intervalu (a, b) pak definujeme jako*

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx := [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Tvrzení 3 (Substituce pro určitý integrál)**.** Nechť $\varphi\colon (\alpha, \beta) \to (C, D)$ je funkce, která má ve všech bodech otevřeného intervalu (α, β) vlastní derivaci. Nechť f má primitivní funkci na (C, D). Potom

$$(N)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (N)\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx,$$

pokud pravá strana existuje.

Definice 5 („Známé primitivní funkce“)**.**

(1) $\int x^a = \dfrac{1}{a+1}x^{a+1}$ *pro* $a \neq -1$

(2) $\int \dfrac{1}{x} = \ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}^+$ *nebo* $x \in \mathbb{R}^-$

(3) $\int \cos(x) = \sin(x)$

(4) $\int \sin(x) = -\cos(x)$

(5) $\int e^x = e^x$

(6) $\int \dfrac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$

(7) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos(x)$, $x \in (-1,1)$

2 Příklady

Příklad 1. Spočítejte

(1) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2-2x+5}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x^2+x+2)}\,dx$

Příklad 2. Spočítejte

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\ \operatorname{arctg}(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3(x)\sin(x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(1+2x^2)^2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^1 |x|\,dx$

(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$

(8) $\displaystyle\int_3^5 \frac{3x+1}{x^2-x-2}\,dx$

Příklad 3. Spočítejte

(1) plochy pod parabolou $y = x^2$ na intervalu $[0,t]$, kde $t \in \mathbb{R}$.

(2) plochy mezi křivkami $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ a $x = 2$.

Příklad 4. Spočítejte

(1) $\displaystyle\int |x|\,dx$

(2) $\displaystyle\int |x^2-1|\,dx$

(3) $\displaystyle\int x^2 \arccos(x)\,dx$

(4) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{(2x^2-1)}{x^3-x^2}\,dx$