Matematická analýza 1 - Cvičení 11

Jan Soukup

2.5.2022

1 Opakování

Definice 1. *Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je daná funkce na netriviálním intervalu. Pokud má funkce $F\colon I \to \mathbb{R}$ na I derivaci a ta se rovná $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$, řekneme, že F* je na intervalu I primitivní funkcí k funkci f.

Definice 2 (Linearita integrálu)**.**

$$\int af + bg = a\int f + b\int g.$$

Definice 3 (Integrace per partes)**.** *Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval a $f, g, F, G : I \to R$ jsou takové funkce, že F je primitivní k f a G ke g. Potom platí identita*

$$\int f(x)G(x)\ dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\ dx + c,$$

tj. součet funkce primitivní k fG a funkce primitivní k Fg je až na aditivní konstantu roven funkci FG.

Tvrzení 1 (O substituci)**.** Buďte dány funkce $\varphi\colon I \to J$ a $f\colon J \to \mathbb{R}$, přičemž φ má na I vlastní derivaci. Nechť je funkce $F\colon J \to \mathbb{R}$ na intervalu J primitivní k funkci f. Pak na intervalu I platí, že

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = F(\varphi(t)) + c.$$

Tvrzení 2 (2. věta o substituci)**.** [O substituci] Buďte dány funkce $g\colon I \to J$ a $f\colon J \to \mathbb{R}$, přičemž g má na I vlastní derivaci. Nechť g je surjekce na a derivace g není na I nulová. Pak platí, že

$$G = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \implies \int f(x) = G(g^{-1}(t)).$$

Definice 4 („Známé primitivní funkce“)**.**

(1) $\int x^a = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ *pro* $a \neq -1$

(2) $\int \frac{1}{x} = \ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}^+ \textit{nebo } x \in \mathbb{R}^-$

(3) $\int \cos(x) = \sin(x)$

(4) $\int \sin(x) = -\cos(x)$

(5) $\int e^x = e^x$

(6) $\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos(x)\ , x \in (-1, 1)$

2 Příklady

Příklad 1. Najdete k následujícím funkcím jejich primitivní funkce (pro danou $f(x)$ najděte $F(x)$ takovou, že $F'(x) = f(x)$).

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

(b) $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$

(c) $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$

(d) $\frac{1}{1+(x+1)^2}$

(e) $f(x) = xe^x$

(f) $f(x) = \ln(x)$

(g) $f(x) = x^3 e^x$

(h) $f(x) = \sin(x)e^x$

Příklad 2. Spočítejte pomocí substituční metody.

(a) $\displaystyle\int e^x \sin(e^x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int \mathrm{tg}(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

Příklad 3. Spočtěte $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ pomocí substituční metody druhého typu.

Příklad 4. Spočítejte

(a) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x-2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{-3x+3}{x^2+2x+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2-2x+5}\,dx$

Příklad 5. Spočítejte

(a) $\displaystyle\int x^2 \arccos(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int \mathrm{arctg}(\sqrt{x})\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{(2x^2-1)}{x^3-x^2}\,dx$