Matematická analýza 1 - Cvičení 10

Jan Soukup

25.4.2022

1 Opakování

Definice 1 (Taylorův polynom). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, nechť $n \in \mathbb{N}_0$ a nechť f je funkce definovaná na okolí a, která má v a vlastní n-tou derivaci $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pokud $n = 0$, předpokládejme i spojitost f v a.* Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a *rozumíme polynom*

$$\begin{aligned} T_n^{f,a}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Tvrzení 1 (Lagrangeův odhad zbytku). Nechť f je funkce, která má na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ vlastní derivaci řádu $n+1$ (a tím pádem i spojité vlastní derivace všech nižších řádů). Volme $a, x \in I$, kde $a \neq x$. Potom existuje bod c ostře mezi a a x takový, že platí

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{1}$$

Speciálně pro $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ ležící ostře mezi body a a b platí $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, máme odhad

$$|R_n^{f,a}(b)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}. \tag{2}$$

Definice 2. *Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Pokud má funkce $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ na (a,b) derivaci a ta se rovná $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a,b)$, řekneme, že F* je na intervalu (a,b) primitivní funkcí k funkci f.

Definice 3 (Linearita integrálu).

$$\int af + bg = a\int f + b\int g.$$

Definice 4 (Integrace per partes). *Nechť jsou funkce f a g spojité na intervalu (a,b) a funkce F a G jsou k nim na (a,b) primitivní. Potom i funkce fG a Fg mají na (a,b) primitivní funkce a na (a,b) platí identita*

$$\int f(x)G(x)\,dx + \int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x) + c,$$

tj. součet funkce primitivní k fG a funkce primitivní k Fg je až na aditivní konstantu roven funkci FG.

Definice 5 („Známé primitivní funkce“).

(1) $\int x^a = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$ *pro* $a \neq -1$

(2) $\int \frac{1}{x} = \ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}^+ nebo\ x \in \mathbb{R}^-$

(3) $\int \cos(x) = \sin(x)$

(4) $\int \sin(x) = -\cos(x)$

(5) $\int e^x = e^x$

(6) $\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)\ , x \in (-1, 1)$

2 Příklady

Příklad 1. Vyšetřete průběh funkce $x + \cos(x)$ nakreslete její graf.

Příklad 2. Dokažte následující tvrzení:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\colon e^x \geq 1 + x$

Příklad 3. Napište Taylorův polynom stupně 3 se středem v nule pro následující funkce.

(a) $f(x) = (1 + x)^a$

(b) $f(x) = \sqrt{1 + x}$

Příklad 4. Pomocí Taylorova polynomu přibližně spočtěte následující hodnoty a odhadněte chybu.

(a) $\cos(0,1)$

(b) $\sqrt{1,02}$.

(c) $e^{0,01}$.

Příklad 5. Najdete k následujícím funkcím jejich primitivní funkce (pro danou $f(x)$ najděte $F(x)$ takovou, že $F'(x) = f(x)$).

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

(b) $f(x) = e^x - e^{-x}$

(c) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

(d) $f(x) = xe^x$

(e) $f(x) = x^2 \ln(x)$

(f) $f(x) = x^3 e^x$

(g) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

Příklad 6 (*)**.** S využitím Taylorového rozvoje spočtěte limitu následujících posloupností.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin(x) - x(1 + x)}{x^3}$