

Matematická analýza 1 - Cvičení 1

Jan Soukup

14.2.2022

1 Opakování

Znamé vzorce:

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\sin^2 + \cos^2 = 1$
- $a \log x = \log x^a$
- $\log x + \log y = \log(xy)$

Definice 1 ((ne)spočetné množiny). *Pojmenujeme následující druhy množin X .*

- (1) X je spočetná, když existuje bijekce $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.
- (2) X je nejvýše spočetná, je-li konečná nebo spočetná.
- (3) X je nespočetná, když není nejvýše spočetná.

2 Příklady

Příklad 1. Rešte následující rovnice a nerovnice v \mathbb{R} :

- (1) $\log(x^2 - 25) = \log(2x + 10)$
- (2) $\log(x^2 + 1) = 2 \log(3 - x)$
- (3) $\frac{3x+1}{x+4} \geq 1$
- (4) $||x - 2| + 1| \leq 5$
- (5) $\sqrt{x^2 - 1} \geq \sqrt{x^2 + x - 6}$
- (6) $\sin(2x) = \sin(x)$
- (7) $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$
- (8) $\sin^2 x < \cos^2 x$

Příklad 2. Načrtněte grafy následujících funkcí:

- (1) $x^2 - 2x - 4$
- (2) $||x - 1| - 1|$

$$(3) \quad |\log|x+1| - 1|$$

Příklad 3. Následující výroky nejprve запиšte pomocí kvantifikátorů a poté je znegujte.

- a) Všechna přirozená čísla jsou sudá.
- b) Každé prvočíslo je liché.
- c) Pro každé přirozené číslo n platí, že pokud je n sudé, pak $(n - 1)^2$ je liché.
- d) Mezi n a $2n$ najdeme vždy nějaké prvočíslo.

Příklad 4.

- a) Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

$$A \implies B, \quad \neg B \implies \neg A, \quad \neg(A \wedge \neg B), \quad \neg A \vee B$$

- b) Jsou i následující dva výroky ekvivalentní?

$$(A \implies B) \implies C, \quad A \implies (B \implies C)$$

Příklad 5. Dokažte:

- (1) Množina všech podmnožin přirozených čísel není spočetná.
- (2) Množina \mathbb{Z} všech celých čísel je spočetná
- (3) Množina \mathbb{Q} všech racionálních čísel je spočetná.
- (4) Množina všech iracionálních čísel je nespočetná.
- (5) Množina všech funkcí $\{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}$ je spočetná.
- (6) Množina všech konečných podmnožin přirozených čísel je spočetná.

Příklad 6 (*). Dokažte, že \mathbb{Q} je husté v \mathbb{R} , tedy $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(a < b \implies (\exists q \in \mathbb{Q})(a < q \wedge q < b))$.