

9. cvičení z PSt — 21.4.2023

- $Exp(\lambda)$ má hustotu $\lambda e^{-\lambda x}$, distr. fci $1 - e^{-\lambda x}$, střední hodnotu $1/\lambda$ a rozptyl $1/\lambda^2$.
- $N(0, 1)$ má hustotu $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, distr. fci Φ , stř. hodnotu 0 a rozptyl 1.
- $N(\mu, \sigma^2)$ má hustotu $\frac{1}{\sigma} \varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, distr. fci $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, střední hodnotu μ a rozptyl σ^2 .
- X, Y jsou spojité n.n.v. Pak $Z = X + Y$ má hustotu

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\Phi(x)$	0.00003	0.00135	0.02275	0.15866	0.500000	0.84135	0.97725	0.99865	0.99997

Další hodnoty viz https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_normal_table – sekce Cumulative.

Normální rozdělení

1. Nechť $Z \sim N(0, 1)$. Pomocí tabulky funkce Φ ověřte pravidlo 3σ , neboli spočtete
 - (a) $P(|Z| \leq 1)$
 - (b) $P(|Z| \leq 2)$
 - (c) $P(|Z| \leq 3)$
 - (d) Přepište, co to znamená pro n.v. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Práce s distribuční funkcí

2. Metrový klacek rozložíme na dva kusy – lomem v uniformně náhodném bodě. Buď X délka delší části.
 - (a) Jaké je rozdělení X ?
 - (b) Určete $\mathbb{E}(X)$.
3. Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy, A a B. Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme – A bude mít pravděpodobnost p , B pravděpodobnost $1 - p$. Dobu běhu A, B, C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je X, Y, Z .
 - (a) Určete F_Z pomocí F_X, F_Y .
 - (b) Pokud jsou X, Y spojité, určete f_Z pomocí f_X, f_Y .
4. Nechť $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ pro $i = 1, \dots, n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, \dots, X_n)$. Ukažte, že $M \sim Exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.
5. Buď Y maximum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$.
 - (a) Najděte distribuční funkci F_Y .
 - (b) Odsud určete hustotu f_Y .
 - (c) Spočtete $\mathbb{E}(Y)$.
 - (d) Jak je to pro minimum těch čísel?

Generování náhodných veličin

6. Vzpomeňte si na větu z přednášky. Nechť $U \sim U(0, 1)$. Jak vyrobíte náhodnou veličinu
- (a) s rozdělením $U(a, b)$?
 - (b) s rozdělením $N(0, 1)$? (Využijte funkce Φ , resp. Φ^{-1} jako “black box”.)
 - (c) s uniformním rozdělením na množině $\{1, 2, \dots, 6\}$?

Konvoluce

7. Buďte $X, Y \sim U(0, 1)$ nezávislé náhodné veličiny. Určete hustotu $X + Y$?

7. domácí úkol (termín odevzdání je 19. 5. 2023)

1. Házíme na terč – kruh o poloměru 1. Předpokládejme, že každý bod v terči má stejnou pravděpodobnost zásahu, přesněji, každá jeho podmnožina má pravděpodobnost úměrnou své ploše. Označme X vzdálenost od středu.
- (a) Najděte distribuční funkci F_X .
 - (b) Najděte hustotní funkci f_X .
 - (c) Zjistěte $\mathbb{E}(X)$, $\text{var}(X)$, σ_X .

[10 bodů]