8. cvičení z PSt — 14.4.2023

- $Exp(\lambda)$ má hustotu $\lambda e^{-\lambda x}$, distr. fci $1-e^{-\lambda x}$, střední hodnotu $1/\lambda$ a rozptyl $1/\lambda^2$.
- $N(0,1)$ má hustotu $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, distr. fci Φ, stř. hodnotu 0 a rozptyl 1.
- $N(\mu, \sigma^2)$ má hustotu $\frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, distr. fci $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, střední hodnotu μ a rozptyl σ^2.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\Phi(x)$	0.00003	0.00135	0.02275	0.15866	0.500000	0.84135	0.97725	0.99865	0.99997

Další hodnoty viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_normal_table` – sekce Cumulative.

Uniformní rozdělení

1. Pan Chen Cheng navštívil Prahu a v uniformně náhodný čas (0:00-24:00) se objeví na Staroměstském náměstí. Každou celou hodinu od 9:00 do 23:00 se na orloji objevuje 12 figur apoštolů.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že pan Cheng uvidí apoštoly, aniž by čekal déle než 15 minut.

(b) Co když pan Cheng přijde na Staroměstské náměstí v uniformně náhodném čase po poledni, tj. 12:00–24:00?

Exponenciální rozdělení

2. Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

(a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

3. Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P(X > s + t \mid X \geq s) = P(X > t)$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Ukažte, že exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojité rozdělení na kladných čísel bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti).

4. Doba trvání ústní zkoušky má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 20 minut. Objednáni jsou dva studenti, Adam na 10:00, Blanka na 10:20. Pokud se zkoušení Adama protáhne, zkoušení Blanky začne až bude Adam hotový, jinak začne přesně v 10:20.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že když Blanka přijde, bude Adam už vyzkoušený?

(b) Jaká je střední hodnota času, po který bude muset Blanka čekat na dozkoušení Adama, pokud při jejím příchodu ještě Adam nebyl vyzkoušený?

řešení: Označme Y náhodnou veličinu, která vyjadřuje délku čekání Blanku. Vidíme, že $Y = \max(X - 20, Y)$. Použijeme větu o celkové střední hodnotě:

$$EY = P(X \leq 20)E[Y|X \leq 20] + P(X > 20)E[Y|X > 20].$$

Pokud $X \le 20$, vidíme, že Y je nulové. Proto $P(X \le 20)E[Y|X \le 20] = 0$, a tedy

$$\begin{aligned} EY &= P(X > 20)E[Y|X > 20] = P(X > 20)E[X - 20|X > 20] = \\ &= \frac{P(X > 20)}{P(X > 20)} \int_{20}^{\infty} (x - 20) f_X(x)\, dx = \\ &= \int_{20}^{\infty} x f_X(x)\, dx - 20 \int_{20}^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_{20}^{\infty} x f_X(x)\, dx - 20P(X > 20). \end{aligned}$$

Víme, že $P(X > 20) = 1 - F_X(20) = 1 - e^{-\frac{20}{20}} = \frac{1}{e}$. Zbývá spočítat

$$\int_{20}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{20}^{\infty} \frac{x}{20} e^{-\frac{x}{20}}\, dx.$$

Použijeme metodu per partes. Tzn. budeme postupovat podle „věty“ $\int a'b = ab - \int ab'$. Zvolíme

$$\begin{array}{ll} a'(x) = \frac{1}{20} e^{-\frac{x}{20}}, & a(x) = -e^{-\frac{x}{20}}, \\ b(x) = x, & b' = 1. \end{array}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{20}^{\infty} \frac{x}{20} e^{-\frac{x}{20}}\, dx &= \left[-x e^{-\frac{x}{20}}\right]_{20}^{\infty} - \int_{20}^{\infty} -e^{-\frac{x}{20}}\, dx = \left[-x e^{-\frac{x}{20}}\right]_{20}^{\infty} - \left[20 e^{-\frac{x}{20}}\right]_{20}^{\infty} = \\ &= \left[-(x + 20) e^{-\frac{x}{20}}\right]_{20}^{\infty} = 0 + \frac{40}{e} = \frac{40}{e}. \end{aligned}$$

Proto

$$EY = \frac{40}{e} - \frac{20}{e} = \frac{20}{e}.$$

(c) Jaká je střední hodnota času, kdy bude Blanka vyzkoušená?

Normální rozdělení

5. Nechť $Z \sim N(0, 1)$. Pomocí tabulky funkce Φ ověřte pravidlo 3σ, neboli spočtěte

(a) $P(|Z| \le 1)$
(b) $P(|Z| \le 2)$
(c) $P(|Z| \le 3)$
(d) Přepište, co to znamená pro n.v. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Práce s distribuční funkcí

6. Metrový klacek rozlomíme na dva kusy – lomem v uniformně náhodném bodě. Buď X délka delší části.

(a) Jaké je rozdělení X?
(b) Určete $\mathbb{E}(X)$.

7. Házíme na terč – kruh o poloměru 1. Předpokládejme, že každý bod v terči má stejnou pravděpodobnost zásahu, přesněji, každá jeho podmnožina má pravděpodobnost úměrnou své ploše. Označme X vzdálenost od středu.

(a) Najděte distribuční funkci F_X.
(b) Najděte hustotní funkci f_X.
(c) Zjistěte $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{var}(X)$, σ_X.

Nápovědy

2, 3: použijte vzorec pro distribuční funkci exponenciálního rozdělení.
4: b: věta o celkové střední hodnotě a příklad 3, c: linearita
5: Potřebujete vždy odečíst dvě vhodné hodnoty v tabulce na první straně.
6: Spočtěte napřed distribuční funkci X, pak její hustotu.

6. domácí úkol (termín odevzdání je 12. 5. 2023)

1. Budeme modelovat množství sněhu, který bude na Silvestra v lyžarském areálu Ještěd, pomocí normálního rozdělení se střední hodnotou 40 (centimetrů) a směrodatnou odchylkou 10.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že nám model určí zápornou hodnotu sněhové pokrývky?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že sněhu napadne 50–70 cm?

[Nápověda: Převeďte na tvrzení o náhodné veličině $N(0,1)$.]

[6 bodů]

2. Frantovi jsme ve skoku do dálky naměřili 9 metrů, což překonává světový rekord o 5 cm. Při měření jsme se ovšem dopustili chyby s rozdělením $N(0, 0.01)$. Jaká je pravděpodobnost, že byl rekord skutečně překonán?

[4 body]