7. cvičení z PSt — 31.3.2023

Připomeňte si, že distribuční funkce F_X je definována vztahem

$$F_X(x) = P(X \le x).$$

Pokud je X spojitá, tak

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

pro nezápornou funkci f_X (hustotu X). Pak je

$$P(X \in A) = \int_A f_X(t)dt, \qquad \text{tedy zejména} \qquad P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(t)dt$$

Platí také $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f_X(x)dx$ a obecněji

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ f_X(t)dt.$$

Stejně jako pro diskrétní n.v. platí i zde, že $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Ještě si připomeneme, že pro $X \sim Exp(\lambda)$ je

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - e^{-\lambda x} && \text{pro } x \ge 0, \text{ jinak } 0 \\ f_X(x) &= \lambda e^{-\lambda x} && \text{pro } x \ge 0, \text{ jinak } 0 \\ \mathbb{E}(X) &= 1/\lambda \\ \text{var}(X) &= 1/\lambda^2 \end{aligned}$$

Používání F a f

1. Pro n.v. X s distribuční funkcí F_X vyjádřete (a) $P(X \in (0,1])$ (b) $P(X > 0)$ (c) $P(X < 0)$ (d) $P(X \in [0,1])$

2. Vyřešte předchozí část znovu, pro n.v. X s hustotou f_X.

3. Nechť X je spojitá náhodná veličina. Vyjádřete pomocí F_X distribuční funkci náhodných veličin
(a) $-X$. (b) $X^+ = \max(0, X)$, (c) $X^- = -\min(X, 0)$, (d) $|X| = X^+ + X^-$.

4. Buď X náhodná veličina s hustotou $f_X(t) = 1/t^2$ pro $t \ge 1$ a $f_X(t) = 0$ jinak.
(a) Ověřte, že se jedná o hustotu.
(b) Určete $\mathbb{E}(X)$.
(c) Spočtěte distribuční funkci, F_X.
(d) Určete $P(2 \le X \le 3)$.
(e) Buď $Y = 1/X$. Jaká je distribuční funkce náhodné veličiny Y?
(f) Určete hustotu náhodné veličiny Y. Pojmenujte její rozdělení.

Modelování pomocí n.v.

5. Pan Chen Cheng navštívil Prahu a v uniformně náhodný čas (0:00-24:00) se objeví na Staroměstském náměstí. Každou celou hodinu od 9:00 do 23:00 se na orloji objevuje 12 figur apoštolů.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že pan Cheng uvidí apoštoly, aniž by čekal déle než 15 minut.

(b) Co když pan Cheng přijde na Staroměstské náměstí v uniformně náhodném čase po poledni, tj. 12:00–24:00?

6. Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

(a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

7. Házíme na terč – kruh o poloměru 1. Předpokládejme, že každý bod v terči má stejnou pravděpodobnost zásahu, přesněji, každá jeho podmnožina má pravděpodobnost úměrnou své ploše. Označme X vzdálenost od středu. (a) Najděte distribuční funkci F_X. (b) Najděte hustotní funkci f_X. (c) Zjistěte $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{var}(X)$, σ_X.

8. Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Ukažte, že exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojité rozdělení na kladných čísel bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti), ale to dokazovat nemusíte.

K procvičení

9. Střední doba života harddisku je 4 roky. Přepokládejme, že tato doba je popsána náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením. (To není realistický předpoklad, viz např. `https://www.backblaze.com/blog/how-long-do-disk-drives-last/`.)

(a) Jaká je pravděpodobnost, že disk selže během prvních tří let?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že vydrží alespoň 10 let?

(c) Po jaké době se rozbije 10 % disků?

10. Plutonium-238 má poločas rozpadu 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za nezávislou náhodnou veličinu s rozdělením $Exp(\lambda)$.

(a) Jaké je λ?

(b) Jaká je střední doba života atomu plutonia-238?

(c) Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?

(d) Kolik procent atomů se rozpadne po 50 letech? (Některé kardiostimulátory používají plutonium-238 jako zdroj energie. `https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear_powered_pacemakers`)

11. Doba, za kterou uvidíme meteor, je exponenciálně rozdělená se střední hodnotou 1 (minuta).

(a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme muset čekat více než 5 minut?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že se dočkáme za nejvýše jednu minutu?

(c) * Jaké je rozdělení času, kdy uvidíme druhý meteor? Třetí, ... (Předpokládáme, že jednotlivé meteory jsou navzájem nezávislé.)

5. domácí úkol (termín odevzdání je 28. 4. 2023)

1. Nechť F_X je dána předpisem $F_X(x) = x/3$ pro $x \in [0,3]$, $F_X(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F_X(x) = 1$ pro $x > 3$. Nechť $Y = 1/X$ a $Z = X^2$. Spočtěte

(a) $P(1 \leq X \leq 2)$ (b) $P(X \leq Y)$ (c) $P(X \leq Z)$ (d) hustotní funkci f_X. (e) distribuční funkce F_Y a F_Z.

[10 bodů]