

6. cvičení z PSt 24.3.2023

Poznávka náhodných veličin

1. Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme jaký. Zkoušíme otevřít dveře.

(a) Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.

(b) Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou (můžeme si je poznačit).

V obou případech zkoumáme, kolikátým pokusem dveře otevřeme. Pojmenujte, jaké je rozdělení této náhodné veličiny a jaká je její střední hodnota.

(c) Jako část (a), ale správné jsou dva klíče z deseti?

(d) Jako část (b), ale správné jsou dva klíče z deseti? (Zde je určení střední hodnoty trochu těžší, stačí když určíte pravděpodobnostní funkci.)

2. Jste ve skupině s dalšími 500 lidmi. Jaké je pravděpodobnost, že právě jeden z nich má narozeniny ve stejný den jako vy? (Ignorujte přestupné roky a to, že ne ve všechny dny se rodí stejně dětí.)

Neboli: označme X počet lidí, se stejnými narozeninami, a spočtěte $p_X(1)$. Jaké je rozdělení X ? Jaká je střední hodnota? Aproximujte $p_X(1)$ pomocí Poissonova rozdělení.

3. X je uniformně náhodná mocnina dvojky mezi $\{2^a, 2^{a+1}, \dots, 2^b\}$.

(a) Vyjádřete X pomocí náhodné veličiny U , která je uniformně rozdělená na množině $\{a, a+1, \dots, b\}$.

(b) Určete $\mathbb{E}(X)$ a $\text{var}(X)$.

Náhodné vektory

4. Nechť X má uniformní rozdělení na množině $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Označme $Y = X^2$. Spočtěte kovarianci X a Y . Jsou X a Y nezávislé?

5. Nechť $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, $Y \sim \text{Pois}(\mu)$ jsou n.n.v. Pak $X + Y \sim \text{Pois}(\lambda + \mu)$.

[Nápověda: použijte konvoluční vzorec podobně jako na přednášce.]

Spojité náhodné veličiny

Připomeňte si, že distribuční funkce F_X je definována vztahem

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

V některých případech (X je spojitá) je $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$ pro vhodnou nezápornou funkci f_X (hustotu X). Pak je $P(X \in A) = \int_A f_X(t)dt$.

6. Pro n.v. X s distribuční funkcí F_X vyjádřete (a) $P(X \in (0, 1])$ (b) $P(X > 0)$ (c) $P(X < 0)$
(d) $P(X \in [0, 1])$

7. Vyřešte předchozí část znovu, pro n.v. X s hustotou f_X .

Bonusy

8. * Označme M počet emailů, které dostaneme za den, S počet spamů mezi nimi, H počet „hamů“ – těch, co nejsou spamy. Předpokládejme, že $M \sim \text{Pois}(\lambda)$ a že každý email má nezávisle na ostatních pravděpodobnost p , že je to spam.

(a) Vyjádřete $P(S = k)$ (jako nekonečnou sumu) pomocí sdruženého rozdělení M a S .

(b) Odvoďte, že $S \sim \text{Pois}(p\lambda)$.

(c) Odvoďte, že $H \sim \text{Pois}((1-p)\lambda)$ a také, že H, S jsou nezávislé n.v.

4. domácí úkol (termín odevzdání je 21. 4. 2023)

1. Hodíme třikrát mincí. Označíme X počet rubů v prvních dvou hodech a Y počet líců v posledních dvou hodech.

(a) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a také marginální pravděpodobnostní funkce p_X , p_Y .

(b) Jsou X a Y nezávislé?

(c) Určete $P(X < Y)$.

(d) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkci $p_{X|Y}$, tj. čísla $P(X = x | Y = y)$ pro všechny hodnoty x, y .

[10 bodů]