Úlohy ke cvičení

Definice 1. Buď I libovolná množina indexů. Jevy $\{A_i : i \in I\}$ jsou *nezávislé (independent)*, pokud pro každou konečnou množinu $J \subseteq I$

$$P(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J, nazýváme jevy $\{A_i : i \in I\}$ *po dvou nezávislé (pairwise independent).*

Definice 2. Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Funkci $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazveme *diskrétní náhodná veličina (discrete random variable)*, pokud $Im(X)$ (obor hodnot X) je spočetná množina a pokud pro všechna reálná x platí

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}.$$

Hodnota

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{x\in Im(X)} xP(X = x),$$

pokud existuje, se nazývá *střední hodnota* náhodné veličiny X.

Věta 3. *Nechť $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou náhodné veličiny. Pak $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$.*

Definice 4. Náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé, pokud jsou nezávislé jevy $\{X_1 = x_1\}, \dots, \{X_n = x_n\}$ pro každou n-tici čísel $x_1, \dots, x_n$.

Úloha 1. Nechť X má uniformní rozdělení na množině $\{a, a + 1, a + 2, \dots, b\}$ (pro celá čísla $a < b$). Určete $\mathbb{E}(X)$.

Úloha 2. Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu 1/10, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.

a) Jaká je $P(X > k)$? (Zkuste napřed pro $k = 1$, $k = 2$.)

b) Jaká je distribuce X? Tj. určete pravděpodobnostní funkci p_X, tj. pro každé x určete $P(X = x)$ (a vzpomeňte si na jméno tohoto rozdělení).

c) Jaká je $P(X \geq 10|X \geq 5)$?

d) Jaká je $\mathbb{E}(X)$?

Úloha 3. Pokračování z minulé úlohy: označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y.

Úloha 4. Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p, že se trefí. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z a její střední hodnotu.

Úloha 5. Uvažme $m + n$ hodů spravedlivou kostkou. Označme X počet šestek z prvních m hodů, Y počet šestek z posledních n hodů. Jaká je distribuce X, Y a $X + Y$?

Úloha 6. Nechť $X = X_1 + \cdots + X_n$, kde pro každé i je $X_i \sim Bern(p)$. Pokud jsou veličiny $X_1, \dots, X_n$ nezávislé, tak $X \sim Bin(n, p)$. Ukažte na příkladu, že pokud omezení na nezávislost neuvedeme (tj. chceme jen $X_i \sim Bern(p)$), tak X může mít i jiné rozdělení.

Úloha 7. Filip má školu 2 km daleko od domu. Když prší (pravděpodobnost 0.6), tak jde pěšky rychlostí průměrně 5 km/h a přijde pozdě s pravděpodobností 0.5. Jinak jede na kole rychlostí 10 km/h a pozdě přijde s pravděpodobností 0.1.

a) Jaká je pravděpodobnost, že přijde pozdě?

b) Jaká je průměrná rychlost, kterou cestuje do školy?

c) Jaký je průměrný čas, který cesta trvá?

Úloha 8. Na koš nezávisle hází n hráčů basketbalu. Při každém hodu má každý z nich pravděpodobnost p, že se trefí, nezávisle na ostatních. Označme X_i pořadí hodu, kterým se i-tý hráč poprvé trefí. Označme dále $X = \min(X_1, \dots, X_n)$.

Rozmyslete si

a) Jaká je distribuce X_1, X_2, …?

b) Jsou veličiny X_1, X_2, … nezávislé?

c) Jaká je distribuce X?