Úlohy ke cvičení

Definice 1. Buď I libovolná množina indexů. Jevy $\{A_i : i \in I\}$ jsou *nezávislé (independent)*, pokud pro každou konečnou množinu $J \subseteq I$

$$P(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J, nazýváme jevy $\{A_i : i \in I\}$ *po dvou nezávislé (pairwise independent)*.

Definice 2. Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Funkci $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazveme *diskrétní náhodná veličina (discrete random variable)*, pokud $Im(X)$ (obor hodnot X) je spočetná množina a pokud pro všechna reálná x platí

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}.$$

Úloha 1. Rozmyslete, zda je podmínku nezávislosti třeba ověřovat pro jednoprvkové množiny J.

Úloha 2. Dokažte, že pokud jsou jevy A, B nezávislé, tak jsou nezávislé i jevy A, B^c. A také jevy A^c, B^c.

Úloha 3.

a) Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň disjunktní?

b) Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň $A \subseteq B$?

Úloha 4. Najděte jevy A, B, C (na libovolném pravděpodobnostním prostoru), které

a) jsou nezávislé.

b) nejsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

c) jsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$.

Úloha 5. Ověřte, že indikátorová náhodná veličina splňuje definici diskrétní náhodné veličiny.

Úloha 6. Buď $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \Omega\}$. Definujme

a) $X(\omega) = \omega$,

b) $Y(\omega) = 1$ (pro sudé ω) a $Y(\omega) = 0$ (jinak),

Rozhodněte, zda X, resp. Y, splňuje definici diskrétní náhodně veličiny.

Úloha 7. Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu 1/10, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.

a) Jaká je $P(X > k)$? (Zkuste napřed pro $k = 1$, $k = 2$.)

b) Jaká je distribuce X? Tj. určete pravděpodobnostní funkci p_X, tj. pro každé x určete $P(X = x)$ (a vzpomeňte si na jméno tohoto rozdělení).

c) Jaká je $P(X \geq 10 | X \geq 5)$?

Úloha 8. Pokračování z minulé úlohy: označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y.

Úloha 9. Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p, že se trefí. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z.

Úloha 10. Vězni A, B a C jsou odsouzeni k trestu smrti. Král náhodně vybral jednoho vězně, kterého následující den omilostní. Dozorce ví, jak král rozhodl, ale nemůže to ještě vězňům říct.

Vězeň A prosí dozorce, aby aspoň řekl jméno jednoho vězně, který bude popraven: „Pokud B bude omilostněn, řekni mi jméno vězně C, pokud C bude omilostněn, řekni mi jmeno B, a pokud já budu omilostněn, náhodně vyber z jmen B a C.“

Dozorce souhlasí a sdělí jméno vězně B.

Vězeň A se raduje, protože věří, že pravděpodobnost, že bude popraven, klesla ze 2/3 na 1/2. Raduje se A oprávněně?

(Pochlubí se tím vězni C, ale ten mu sdělí, že jeho šance na popravu zůstává neměnná. Zároveň se vězeň C raduje, protože věří, že jeho šance na popravu klesla na 1/3. Raduje se C oprávněně?)