10. cvičení z PSt — 28.4.2023

Sdružená & podmíněná hustota

1. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).
(a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.
(b) Určete také distribuční funkce F_X, F_Y, $F_{X,Y}$.
(c) Jsou X, Y nezávislé?
(d) Najděte $P(X+Y \le 1)$ a $P(X > Y)$.

2. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.
(b) Určete podmíněnou hustotu $f_{Y|X}$.

Aplikace nerovností a Centrální Limitní Věty

3. Na poště v Jindřišské v průměru za den zpracují 10 000 dopisů denně. (Tj. střední hodnota je 10 000.)

(a) Co nám Markovova nerovnost říká o pravděpodobnosti, že zítra bude poště muset zpracovat aspoň 15 tisíc dopisů?

(b) Předpokládejme navíc, že rozptyl $\sigma^2 = 2000$. Co nám říká Čebyševova nerovnost o pravděpodobnosti toho, že pošta bude muset zítra zvládnout mezi 8000 a 12000 dopisy?

(c) Můžeme nějak použít Čebyševovu nerovnost k tomu, abychom určili pravděpodobnost toho, že pošta bude muset zítra zpracovat aspoň 15 tisíc dopisů?

4. Statistik chce odhadnout průměrnou výšku h (v metrech) lidí v nějaké populaci, pomocí n nezávislých vzorků $X_1, \ldots, X_n$, které vybíráme uniformně náhodně se všech možnych lidí. Pro odhad použije výběrový průměr $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Odhaduje, že směrodatná odchylka jednoho výběru je nejvýše 1 metr.

(a) Jak velké n má volit, aby směrodatná odchylka S_n byla nejvýše 1 cm?

(b) Pro jaké n zajistí Čebyševova nerovnost, že pravděpodobnost, že M_n se liší od h nejvýše o 5 cm s pravděpodobností alespoň 99%?

5. Označme $S = \sum_{k=0}^{30} \binom{100}{k}$. Označme dále $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$, kde X_i je ± 1 s pravděpodobností 1/2 a veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé.
(a) Vyjádřete S pomocí pravděpodobnosti $P(X \le x)$ pro vhodné x.
(b) Použijte CLV na odhad této pravděpodobnosti.
(c) Případně vyčíslete S vhodným softwarem a srovnejte.

Soupis vzorečků

- Vztah sdružené hustoty a sdružené distribuční funkce

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- Marginální hustota ze sdružené

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

- Nezávislost $X, Y \iff F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx$
- Konvoluce: Nechť X, Y jsou spojité n.n.v. Pak $S = X+Y$ má hustotu $f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(s-x)dx$.
- Podmíněná hustota: pro n.v. X, Y: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, pokud $f_Y(y) > 0$, jinak nedefinujeme.
- *Markovova nerovnost:* $P(X \geq a) \leq \mathbb{E}(X)/a$ pro $X \geq 0$, $a > 0$.
- *Čebyševova nerovnost:* $P(|X-\mu| \geq a\sigma) \leq 1/a^2$ pro $\mu = \mathbb{E}(X)$, $\sigma^2 = \mathrm{var}(X)$.
- *Černovova nerovnost:* $P(X \geq t) = P(X \leq -t) \leq e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$ pro $X = X_1, \ldots, X_n$, kde všechna $X_i = \pm 1$ jsou n.n.v. a $\sigma^2 = \mathrm{var}(X)$.
- *Centrální limitní věta:* Pro $X_1, X_2, \ldots$ stejně rozdělené n.v. s konečným μ a σ, $Y_n = \frac{X_1+\ldots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ platí $Y_n \xrightarrow{d} \Phi$.
- Na počítání $\Phi(x)$: `https://t.ly/JRQ2`

K procvičení

6. Metrový klacek rozlomíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem jedna stranami nějakého trojúhelníku.)

(a) Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.
(b) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.
(c) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.

7. Volme uniformně náhodně bod z trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0,0]$, $[0,1]$ a $[1,0]$, tj. pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu. Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
(b) Najděte marginální hustotu f_Y.
(c) Najděte podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.
(d) Spočtěte $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ a podle věty o rozboru možností spočtěte $\mathbb{E}(X)$ (pomocí $\mathbb{E}(Y)$).
(e) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí předchozí části a symetrie.

8. Buďte $X, Y, Z \sim Exp(\lambda)$ nezávislé náhodně veličiny.

(a) Jaké je rozdělení $X + Y$? (b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

8. domácí úkol (termín odevzdání je 26. 5. 2023)

1. Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme Y. V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme X.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Může vám pomoci podmíněná hustota $f_{X|Y}$.
(b) Najděte marginální hustotu f_X.
(c) Pomocí f_X spočtěte $\mathbb{E}(X)$.

[10 bodů]