Úlohy ke cvičení

Definice 1. Skóre grafu G je posloupnost stupňů jeho vrcholů.

Věta 2. *Nechť $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je posloupnost přirozených čísel. Předpokládejme, že $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$, a označme symbolem D' posloupnost $(d'_1, d'_2, \ldots, d'_{n-1})$, kde*

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n, \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n. \end{cases}$$

Potom D je skóre grafu právě tehdy, když D' je skóre grafu.

Definice 3. Buď $G = (V, E)$ graf, pak jeho doplněk je graf $G_0 = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$, neboli $\{u, v\}$ je hranou grafu G_0 právě tehdy, když není hranou grafu V.

Definice 4. Uzavřený sled $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$ v grafu G je *eulerovský*, pokud se v něm každá hrana grafu G vyskytuje právě jednou a každý vrchol alespoň jednou. Graf se nazývá *eulerovský*, pokud v něm existuje eulerovský sled.

Věta 5. *Graf je eulerovský právě tehdy, když neobsahuje žádný vrchol lichého stupně.*

Definice 6. Graf se nazýva *bipartitní*, pokud můžeme rozdělit jeho vrcholy do dvou disjunktních množin tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana.

Úloha 1. Ověřte, zdali je posloupnost $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$ skóre grafu. Pokud ano, sestrojte graf, který má takové skóre.

Úloha 2. Dokažte, že doplněk nesouvislého grafu je nutně souvislý.

Úloha 3. Ukažte, že když G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak potom obsahuje také nějaký lichý cyklus jako indukovaný podgraf.

Úloha 4. Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Úloha 5. Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Úloha 6. Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na disjunktní sjednocení kružnic.

Úloha 7. Existuje bipartitní graf s aspoň 5 vrcholy, jehož doplněk je také bipartitní?