Úlohy ke cvičení

Definice 1. Jako *relaci* R nazveme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $X \times Y$. Neboli $R \subseteq X \times Y$. Pokud $X = Y$, pak o R hovoříme jako o *relaci na* X. Místo $(x, y) \in R$ často píšeme xRy. Relací R^{-1} rozumíme $R^{-1} = \{(x, y); (y, x) \in R\}$.

Definice 2. Relace R na množině X je:

- *reflexivní*, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx,
- *symetrická*, pokud xRy implikuje yRx,
- *antisymetrická*, pokud xRy a yRx implikuje $x = y$,
- *tranzitivní*, pokud xRy a yRz implikuje xRz.

Definice 3. Relace na množině X se nazývá

- *ekvivalence*, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní,
- *(částečné) uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Definice 4. Relace $f \subseteq X \times Y$ se nazývá *zobrazení*, pokud pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ takové, že xfy. Takové y značíme $f(x)$. Zobrazení pak značíme $f\colon X \to Y$.

Definice 5. Zobrazení $f\colon X \to Y$ se nazývá

- *prosté (injektivní)*, pokud $f(x_1) = f(x_2)$ implikuje $x_1 = x_2$,
- *na (surjektivní)*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$,
- *vzájemně jednoznačné (bijektivní)*, pokud je prosté a na.

Definice 6. Buď $(X, \preceq)$ částečné uspořádání. Prvek $a \in X$ se nazývá

- *největší prvek*, pokud pro každé $x \in X$ platí $x \preceq a$,
- *maximální prvek*, pokud $a \preceq x$ implikuje $x = a$. Neboli neexistuje žádné x, které by bylo “nad” a v tomto uspořádání.

Analogicky definujeme *nejmenší* a *minimální prvek*.

Definice 7. Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Pak M se nazývá

- *řetězec*, pokud pro každé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \preceq m_2$ nebo $m_2 \preceq m_1$. Neboli každé dva prvky z M jsou porovnatelné.
- *Antiřetězec*, pokud pro každé dva různé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \not\preceq m_2$ ani $m_2 \not\preceq m_1$. Neboli každé dva různé prvky z M jsou neporovnatelné.

Věta 8. *Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná konečná množina. Pak platí:*

- *Řetězec $\{r_1, \ldots, r_n\} \subseteq X$ je nejdelší právě tehdy, když existuje n antiřetězců $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$, které pokrývají X, tj. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$.*
- *Antiřetězec $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq X$ je největší právě tehdy, když existuje m řetězců $R_1, \ldots, R_m \subseteq X$, které pokrývají X, tj. $\bigcup_{k=1}^{m} R_k = X$.*

Důkaz. Pro naše účely stačí jen jedna implikace. Pokud by řetězec $\{r_1, \ldots, r_n\}$ nebyl nejdelší, musel by existovat řetězec $\{r'_1, \ldots, r'_{n+1}\}$ délky $n+1$. Protože máme n antiřetězců, které pokrývají X, musí nutně jeden z těchto antiřetězců obsahovat alespoň 2 prvky z řetězce $\{r'_1, \ldots, r'_{n+1}\}$ délky $n+1$. To je ale spor, protože všechny prvky v řetězci jsou porovnatelné, ale všechny prvky v antiřetězci jsou neporovnatelné. $\square$

Úloha 1. Určete počet různých ekvivalencí na čtyřech prvcích.

Úloha 2. Buďte X, Y konečné množiny takové, že $|X| \leq |Y|$.

a) Určete počet všech zobrazení $f\colon X \to Y$.

b) Určete počet prostých zobrazení $f\colon X \to Y$.

c) Určete počet vzájemně jednoznačných zobrazení $f\colon X \to X$.

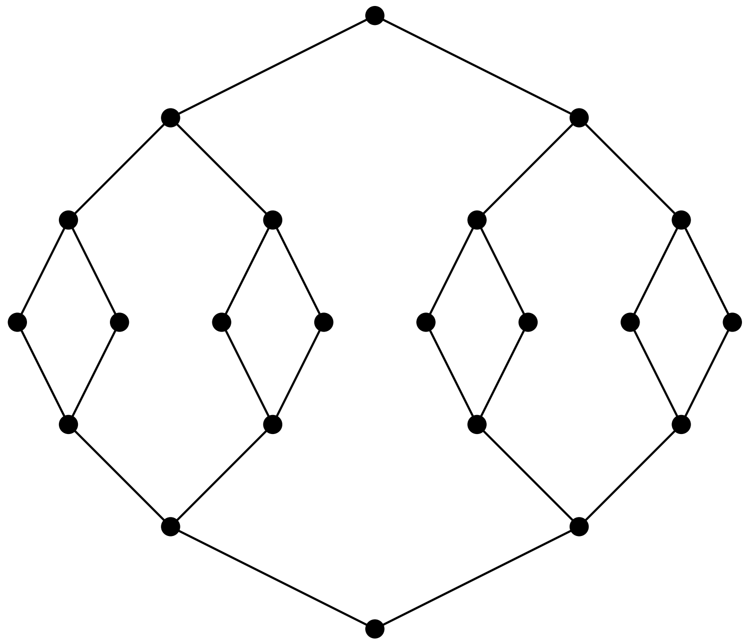
Úloha 3. Najděte

a) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$,

b) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$,

c) prosté zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{N}$. (Nebo dokonce zkonstruujte bijekci.)

Úloha 4. U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký nejdelší řetězec a největší antiřetězec. Zdůvodněte, proč nelze najít delší, resp. větší.



Úloha 5. a) Rozhodněte, zdali v každém konečném a neprázdném částečném uspořádání musí každý nejdelší řetězec protínat antiřetězec tvořený maximálními prvky.

b) Najděte uspořádání, ve kterém nejdelší řetězec neprotíná každý největší antiřetězec.

c) Najděte uspořádání, ve kterém je unikátní nejdelší řetězec R, unikátní největší antiřetězec A a zároveň se R a A neprotínají.