

Úlohy ke cvičení

Definice 1. Buď (Ω, P) konečný pravděpodobnostní prostor. Libovolné zobrazení $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *náhodná veličina*.

Hodnota $EX := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$ se nazývá *střední hodnota* náhodné veličiny X .

Věta 2. Necht $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jsou náhodné veličiny. Pak $E(X + Y) = EX + EY$.

Věta 3 (Markovova nerovnost). Necht X je nezáporná náhodná veličina, $a > 0$. Pak

$$P[X \geq a] \leq \frac{EX}{a}.$$

Úloha 1. Na louce je n zajíců. Najednou se přiblíží n myslivců a každý náhodně zamíří a vystřelí na jednoho zajíce. Jaká je střední hodnota počtu přeživších zajíců?

Úloha 2. Určete střední hodnotu počtu pevných bodů náhodné permutace na n prvcích.

Úloha 3. Mějme minci, na které padá panna s pravděpodobností $1/5$. Určete pravděpodobnost, že panna padne při 20 hodech alespoň $16 \times$.

Porovnejte tuto pravděpodobnost s odhadem, který pro ni získáme pomocí Markovovy nerovnosti.

Úloha 4. Navrhněte postup, jak by se dala simulovat vyvážená mince (panna a orel padají s pravděpodobností $1/2$) pomocí nevyvážené mince, na které panna padá s pravděpodobností p , přičemž hodnotu p neznáme.

Úloha 5. Necht $\alpha(G)$ označuje velikost nejmenší nezávislé množiny grafu G , n počet jeho vrcholů a d jeho průměrný stupeň. Ukažte, že

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}.$$