

Úlohy ke cvičení

Definice 1 (Podmíněná pravděpodobnost). Pravděpodobnost jevu A ze předpokladu B je $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Definice 2. Jevy A, B se nazývají nezávislé, pokud $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Obecně jevy A_1, \dots, A_n se nazývají nezávislé, pokud pro každou množinu indexů $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ platí

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Věta 3 (Bayesův vzorec).

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Definice 4. Buď (Ω, P) konečný pravděpodobnostní prostor. Libovolné zobrazení $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *náhodná veličina*.

Hodnota $EX := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$ se nazývá *střední hodnota* náhodné veličiny X .

Věta 5. Necht' $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jsou náhodné veličiny. Pak $E(X + Y) = EX + EY$.

Úloha 1. V zábavném pořadu *Let's Make a Deal* nabízel moderátor Monty Hall výhru pod následujícími pravidly: Výhra, automobil, je schovaná za jedněmi ze tří dveří. Za zbylými dvěma je cena útěchy, koza. Hráč nejprve na některé dveře ukáže. Moderátor, který ví, kde se skrývá výhra, otevře z ostatních dvou dveří ty, za kterými výhra není. V této situaci má hráč otevřít jedny ze zbylých dvou dveří, aby dostal, co se za nimi skrývá.

Je pro hráče výhodné změnit názor a otevřít jiné dveře, než na které původně ukázal?

Úloha 2. Určete pravděpodobnost, že při hodu šesti hracími kostkami padnou na alespoň třech kostkách alespoň tři oka.

Úloha 3. Jaká je pravděpodobnost, že v této třídě mají dva lidi narozeniny ve stejný den?

Úloha 4. Najděte příklad 3 jevů v nějakém pravděpodobnostním prostoru, z nichž každé dva jsou nezávislé, ale všechny tři nezávislé nejsou.

Úloha 5. Ukažte, že pokud jsou jevy A, B nezávislé, pak jsou i jevy \bar{A}, B nezávislé a jevy \bar{A}, \bar{B} nezávislé.

Úloha 6. Mějme dvě truhly. První obsahuje jednu zlatou a jednu stříbrnou minci, druhá obsahuje dvě zlaté mince. Vybrali jsme truhlu a vytáhli z ní minci, která je zlatá. Jaká je pravděpodobnost, že je i druhá mince ve vybrané truhle zlatá?

Úloha 7. V rodině XY jsou dvě děti.

- a) Víme, že jedno z nich je dívka. Jaká je pravděpodobnost, že jsou obě děti dívky?
- b) Víme, že jedno z nich se jmenuje Anička. Jaká je pravděpodobnost, že jsou obě děti dívky?

Úloha 8. Mějme nemoc, kterou trpí 1 % populace, a test na tuto nemoc, který má 5% chybovost v obou směrech. Jaká je pravděpodobnost, že trpím touto nemocí, pokud mi vyjde pozitivní test?

Úloha 9. Ukažte, že každý graf s $m \geq 2$ hranami má bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.