Úlohy ke cvičení

Věta 1. *Je-li* $G = (V, E)$ *rovinný graf s alespoň* 3 *vrcholy, pak* $|E| \leq 3|V| - 6$. *Pokud navíc* G *neobsahuje trojúhelník jako podgraf, pak platí* $|E| \leq 2|V| - 4$.

Definice 2. Uzavřený sled $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$ v grafu G je *eulerovský*, pokud se v něm každá hrana grafu G vyskytuje právě jednou a každý vrchol alespoň jednou. Graf se nazývá *eulerovský*, pokud v něm existuje eulerovský sled.

Věta 3. *Graf je eulerovský právě tehdy, když neobsahuje žádný vrchol lichého stupně.*

Definice 4. Graf se nazývá *bipartitní*, pokud můžeme rozdělit jeho vrcholy do dvou disjunktních množin tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana.

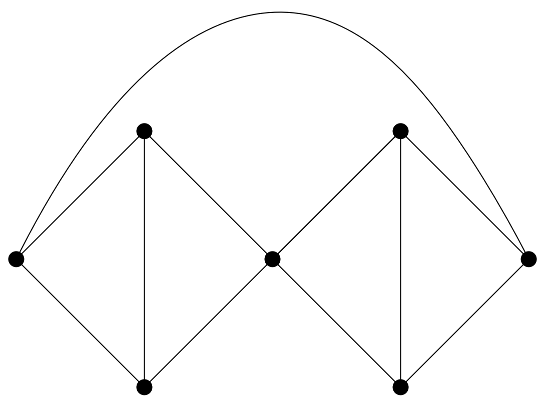
Věta 5. *Graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje cyklus liché délky.*

Definice 6. Pro graf $G = (V, E)$ a přirozené číslo k nazveme zobrazení $b\colon V \to \{1, \ldots, k\}$ *obarvením grafu G pomocí k barev*, pokud pro každé dva vrcholy $u, v \in V$ platí $\{u, v\} \in E \implies b(u) \neq b(v)$. Barevnost grafu G, kterou značíme $\chi(G)$, je pak minimální počet barev potřebný k obarvení G.

Úloha 1. Dokažte, že odhad $|E| \leq 2|V| - 4$ pro rovinné grafy bez trojúhelníku je nejlepší možný.

Úloha 2. Ukažte, že duál eulerovského rovinného grafu je bipartitní.

Úloha 3. Určete barevnost grafu na obrázku níže.



Úloha 4. Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinný graf bez trojúhelníku.

Úloha 5. Označme $\delta(G)$ minimální stupeň grafu G. Dokažte, že barevnost G je menší nebo rovna $1 + \max\{\delta(G'); G' \text{ je podgraf G}\}$.