

Úlohy ke cvičení

Úloha 1. Dokažte matematickou indukcí:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}(n^2 + n),$$

$$\text{b) } \sum_{i=0}^n 2i + 1 = (n + 1)^2,$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Úloha 2. Nakresleme n přímk v rovině tak, že žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Dokažte matematickou indukcí, že rovina je těmito přímkami rozdělena na přesně $n(n + 1)/2 + 1$ částí.

Úloha 3. Skupina odsouzených vězňů získala šanci se zachránit. Následující den každý vězeň dostane náhodně buď červenou, nebo černou čepici. Poté budou postaveni do řady tak, že každý vidí všechny vězně a jejich čepice před sebou, ale nikoho za sebou. Zároveň žádný vězeň neví, jakou má čepici. Vězni budou postupně od posledního v řadě voláni, aby řekli barvu svoji čepice. Pokud barvu uhádnou, bude jim udělena milost. Každý vězeň zároveň slyší, co říkají spoluvězni stojící za ním (tedy ti, kteří jsou voláni před ním). Přes noc mají vězni možnost domluvit se na strategii. Najděte strategii, která maximalizuje počet zachráněných vězňů.

Úloha 4. Mějme 9 mincí a rovníramenné váhy. Právě jedna z mincí je falešná, což se pozná tak, že je lehčí. Jak na co nejmenší počet vážení odhalit onu falešnou minci?

Úloha 5. Mějme tři truhly. Jedna obsahuje zlato, druhá stříbro a třetí šváby. Na každé truhle je cedulka, kde je napsáno, co by měla obsahovat, nicméně víme, že jsou přehozené tak, že v žádné truhle není to, co je napsáno na cedulce. Jak na co nejmenší počet otevření truhel zjistit, co každá z nich obsahuje?

Úloha 6. Topinka se opéká 2 minuty z každé strany. Na pánev se nám vlezou 2 krajíce chleba. Jak co nejrychleji udělat 3 topinky?