Úlohy ke cvičení

Definice 1. Uzavřený sled $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$ v grafu G je *eulerovský*, pokud se v něm každá hrana grafu G vyskytuje právě jednou a každý vrchol alespoň jednou. Graf se nazývá *eulerovský*, pokud v něm existuje eulerovský sled.

Věta 2. *Graf je eulerovský právě tehdy, když neobsahuje žádný vrchol lichého stupně.*

Definice 3. Graf se nazývá *k-regulární*, pokud má všechny vrcholy stupně k.

Věta 4. *Pro každý graf $G(V, E)$ platí $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, kde $\deg(v)$ označuje stupeň vrcholu v.*

Jako důsledek dostáváme, že každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

Definice 5. Graf se nazývá *strom*, pokud je souvislý a neobsahuje cyklus jako podgraf.

Kostra grafu je jeho podgraf na všech jeho vrcholech, který je stromem.

Úloha 1. Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Úloha 2. Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Úloha 3. Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na disjunktní sjednocení kružnic.

Úloha 4. Ukažte, že pokud má $2k$-regulární graf $G(V, E)$ sudý počet hran, tak k nebo $|V|$ je sudé.

Úloha 5. Jak pomocí mocnění matice sousednosti určíme počet čtyřcyklů v grafu?