

## Úlohy ke cvičení

**Definice 1.** Skóre grafu  $G$  je posloupnost stupňů jeho vrcholů.

**Věta 2.** Necht  $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  je posloupnost přirozených čísel. Předpokládejme, že  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ , a označme symbolem  $D'$  posloupnost  $(d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1})$ , kde

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n, \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n. \end{cases}$$

Potom  $D$  je skóre grafu právě tehdy, když  $D'$  je skóre grafu.

**Definice 3.** Buď  $G = (V, E)$  graf, pak jeho doplněk je graf  $G_0 = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ , neboli  $\{u, v\}$  je hranou grafu  $G_0$  právě tehdy, když není hranou grafu  $G$ .

**Definice 4.** Graf se nazývá *bipartitní*, pokud můžeme rozdělit jeho vrcholy do dvou disjunktních množin tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana.

---

**Úloha 1.** Ověřte, zdali je posloupnost  $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$  skóre grafu. Pokud ano, sestrojte graf, který má takové skóre.

**Úloha 2.** Ukažte, že když  $G$  obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak potom obsahuje také nějaký lichý cyklus jako indukovaný podgraf.

**Úloha 3.** Dokažte, že doplněk nespojitelného grafu je nutně souvislý.

**Úloha 4.** Ukažte, že graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje lichý cyklus jako podgraf.