Úlohy ke cvičení

Věta 1 (Princip inkluze a exkluze)**.** *Nechť $A_1, \dots A_n$ jsou konečné množiny. Pak platí*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Definice 2. *Graf* $G = (V, E)$ je dvojice, která sestává z množiny *vrcholů* V a z množiny *hran* $E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{u, v\}; u, v \in V, u \neq v\}$.

Definice 3. Graf $G = (V_G, E_G)$ je *izomorfní* grafu $H = (V_H, E_H)$, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f\colon V_G \to V_H$ takové, že $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_H$.

Definice 4. Buď $G = (V, E)$ graf, pak jeho doplněk je graf $G_0 = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$, neboli $\{u, v\}$ je hranou grafu G_0 právě tehdy, když není hranou grafu V.

Úloha 1. Určete počet surjektivních zobrazení z m-prvkové množiny na n-prvkovou množinu.

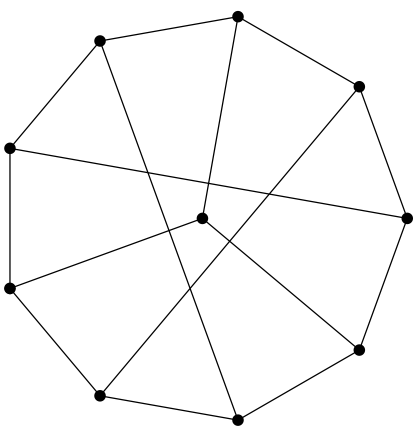
Můžeme na základě toho určit počet ekvivalencí na $n-$prvkové množině?

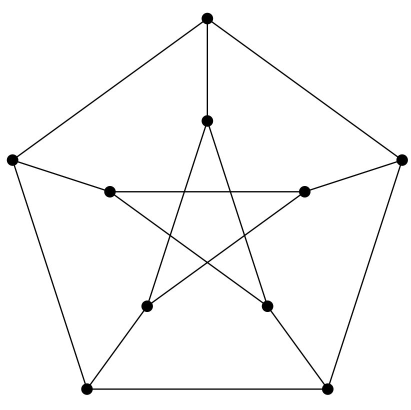
Úloha 2. Dokažte, že platí následující odhady kombinačního čísla $\binom{2n}{n}$.

a) $\dfrac{4^n}{2n+1} \leq \dbinom{2n}{n} \leq 4^n$

b) $\displaystyle\prod_{\substack{n<p\leq 2n \\ p \text{ je prvočíslo}}} p \leq \binom{2n}{n}$

Úloha 3. Nalezněte izomorfismus grafů na obrázku:





Úloha 4. Kolik existuje grafů na n vrcholech bez izolovaných vrcholů?

Pozn.: Vrchol je izolovaný, pokud nepatří do žádné hrany.

Úloha 5. Kolik existuje rozdělení do dvojic ve skupině $2n$ lidí?

Neboli kolik existuje perfektních párování v úplném grafu?

Úloha 6. Najděte nějaké grafy, které jsou izomorfní svým doplňkům.