

Úlohy ke cvičení

Definice 1. Buď A konečná množina a $\pi: A \rightarrow A$ permutace na množině A (tj. vzájemně jednoznačné zobrazení). Řekneme, že π má *pevný bod*, pokud existuje $a \in A$ takové, že $\pi(a) = a$. Počet permutací bez pevného bodu na n -prvkové množině pak značíme $\check{s}(n)$.

Věta 2 (Princip inkluze a exkluze). *Nechť A_1, \dots, A_n jsou konečné množiny. Pak platí*

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Úloha 1. Dokažte kombinatorickou úvahou:

a) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

d) $\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

e) $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

c) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

f) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Úloha 2. Sečtěte:

a) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$

Úloha 3. Profesor Plešohlav zjistil, že stejné konference se účastní 5 jeho přátel. Z těchto pěti lidí potkal během přednášek:

- každého jednotlivce $10 \times$,
- každou dvojici $5 \times$,
- každou trojici $3 \times$,
- každou čtveřici $2 \times$,
- celou pěticí $1 \times$.

Kolik přednášek měla konference, pokud profesor potkal na každé přednášce někoho ze svých přátel?

Úloha 4. Kolik existuje permutací n -prvkové množiny s právě jedním cyklem?

Úloha 5. Dokažte vztah

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \dots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1.$$

Úloha 6. Určete počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.