

## Úlohy ke cvičení

**Definice 1.** Jako *relaci*  $R$  nazveme libovolnou podmnožinu kartézského součinu  $X \times Y$ . Neboli  $R \subseteq X \times Y$ . Pokud  $X = Y$ , pak o  $R$  hovoříme jako o *relaci na*  $X$ . Místo  $(x, y) \in R$  často píšeme  $xRy$ . Relací  $R^{-1}$  rozumíme  $R^{-1} = \{(x, y); (y, x) \in R\}$ .

**Definice 2.** Relace  $R$  na množině  $X$  je:

- *reflexivní*, pokud pro každé  $x \in X$  platí  $xRx$ ,
- *symetrická*, pokud  $xRy$  implikuje  $yRx$ ,
- *antisymetrická*, pokud  $xRy$  a  $yRx$  implikuje  $x = y$ ,
- *tranzitivní*, pokud  $xRy$  a  $yRz$  implikuje  $xRz$ .

**Definice 3.** Mějme relace  $R \subseteq X \times Y$ ,  $S \subseteq Y \times Z$ . Pak *složení* relací  $R, S$  je relace  $R \circ S \subseteq X \times Z$  definovaná následovně:  $xR \circ Sz$  právě tehdy, když existuje  $y \in Y$  takové, že  $xRy$  a zároveň  $ySz$ .

**Definice 4.** Relace  $f \subseteq X \times Y$  se nazývá *zobrazení*, pokud pro každé  $x \in X$  existuje právě jedno  $y \in Y$  takové, že  $xfy$ . Takové  $y$  značíme  $f(x)$ . Zobrazení pak značíme  $f: X \rightarrow Y$ .

**Definice 5.** Zobrazení  $f: X \rightarrow Y$  se nazývá

- *prosté (injektivní)*, pokud  $f(x_1) = f(x_2)$  implikuje  $x_1 = x_2$ ,
- *na (surjektivní)*, pokud pro každé  $y \in Y$  existuje  $x \in X$  takové, že  $f(x) = y$ ,
- *vzájemně jednoznačné (bijektivní)*, pokud je prosté a na.

**Úloha 1.** Rozhodněte, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní a antisymetrické.

a)  $X = \{a, b, c\}$ ,  $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$

b)  $X = \{a, b, c\}$ ,  $R = \{(a, a), (c, c)\}$

c)  $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$ ,

d)  $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ ,  $R = \{(x, y) : nsd(x, y) = 1\}$ , neboli  $x$  a  $y$  jsou nesoudělné.

**Úloha 2.** Buďte  $R$  a  $S$  reflexivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také reflexivní?

- |                    |                 |
|--------------------|-----------------|
| a) $R \cup S$      | d) $R \oplus S$ |
| b) $R \cap S$      | e) $R \circ S$  |
| c) $R \setminus S$ | f) $R^{-1}$     |

**Úloha 3.** Buďte  $X, Y$  konečné množiny takové, že  $|X| \leq |Y|$ .

- Určete počet všech zobrazení  $f: X \rightarrow Y$ .
- Určete počet prostých zobrazení  $f: X \rightarrow Y$ .
- Určete počet vzájemně jednoznačných zobrazení  $f: X \rightarrow X$ .

**Úloha 4.** Najděte

- bijekci mezi  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{Z}$ ,
- bijekci mezi  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{N}^2$ ,
- prosté zobrazení z  $\mathbb{Q}$  do  $\mathbb{N}$ . (Nebo dokonce zkonstruuje bijekci.)