

Úlohy ke cvičení

Úloha 1. Skupina odsouzených vězňů získala šanci se zachránit. Následující den každý vězeň dostane náhodně buď červenou, nebo černou čepici. Poté budou postaveni do řady tak, že každý vidí všechny vězně a jejich čepice před sebou, ale nikoho za sebou. Zároveň žádný vězeň neví, jakou má čepici. Vězni budou postupně od posledního v řadě voláni, aby řekli barvu svoji čepice. Pokud barvu uhádnou, bude jim udělena milost. Každý vězeň zároveň slyší, co říkají spoluvězni stojící za ním (tedy ti, kteří jsou voláni před ním). Přes noc mají vězni možnost domluvit se na strategii. Najděte strategii, která maximalizuje počet zachráněných vězňů.

Úloha 2. Mějme 9 mincí a rovnoramenné váhy. Právě jedna z mincí je falešná, což se pozná tak, že je lehčí. Jak na co nejmenší počet vážení odhalit onu falešnou minci?

Úloha 3. Mějme tři truhly. Jedna obsahuje zlato, druhá stříbro a třetí šváby. Na každé truhle je cedulka, kde je napsáno, co by měla obsahovat, nicméně víme, že jsou přehozené tak, že v žádné truhle není to, co je napsáno na cedulce. Jak na co nejmenší počet otevření truhel zjistit, co každá z nich obsahuje?

Úloha 4. Topinka se opéká 2 minuty z každé strany. Na pánev se nám vlezou 2 krajíce chleba. Jak co nejrychleji udělat 3 topinky?

Úloha 5. Skupina 4 lidí prchá před příšerami a musí překonat lanový most. Po něm mohou jít pouze dva lidé současně. Zároveň už je tma a každý, kdo se pohybuje musí mít lucernu nebo být poblíž někoho s lucernou. K dispozici je však jen 1 lucerna. Člověk A ze skupiny potřebuje na zdolání mostu 1 minutu, člověk B 2 minuty, člověk C 5 minut a člověk D 10 minut. Víme také, že příšery se k mostu dostanou za 17 minut. Má naše skupina šanci včas zdolat most a přeříznout lana?

Úloha 6. Zjistěte, které z následujících podmínek nejsou ekvivalentní podmínce $A \subseteq B$. Pokuste se ji upravit tak, aby ekvivalence platila a to pokud možno co nejmenším zásahem.

a) $A \setminus B = \emptyset$

d) $\overline{A} \setminus B \subseteq \overline{B}$

b) $A \cup B = B$

e) $A \cap \overline{B} = \emptyset$

c) $A \cap B = A$

f) $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

Úloha 7. Zjistěte, které z následujících vztahů pro symetrickou diferenci \oplus definovanou $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ platí a které neplatí.

a) $A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$

b) $A \oplus B = B \oplus A$

c) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

d) $A \oplus (B \oplus A) = A$

e) $A \oplus A = \emptyset$

g) $A \oplus \emptyset = A$

Pokud neplatí, opravte ji pokud možno co nejmenším zásahem.