

Úlohy ke cvičení

Věta 1. Pro každý graf $G(V, E)$ platí $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, kde $\deg(v)$ označuje stupeň vrcholu v .

Jako důsledek dostáváme, že každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

Definice 2. Graf se nazývá *strom*, pokud je souvislý a neobsahuje cyklus jako podgraf.

Kostra grafu je jeho podgraf na všech jeho vrcholech, který je stromem.

Věta 3 (Cayleyho formule). Pro každé $n \geq 2$ je počet stromů na n vrcholech roven n^{n-2} .

Úloha 1. Mějme strom, který má $l > 0$ listů a i vnitřních vrcholů, přičemž každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že vždy platí $l = i + 2$.

Úloha 2. Ukažte, že pro každou kostru K grafu G a hranu $e \in E_G \setminus E_K$ existují dvě hrany kostry e' a e'' takové, že jak $(K \setminus e') \cup e$ tak $(K \setminus e'') \cup e$ jsou opět kostry grafu G .

Úloha 3. Určete počet koster grafu $K_{2,n}$.

Úloha 4. Pomocí Cayleyho formule spočítejte počet koster grafu $K_n \setminus e$, tedy úplného grafu na n vrcholech bez jedné hrany.

Úloha 5. Najděte rovinný graf, který má stupně všech vrcholů 5.

Úloha 6. Nakreslete K_5 , K_6 na torus.