Úlohy ke cvičení

Definice 1. Buď $G = (V, E)$ graf, pak jeho doplněk je graf $G_0 = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$, neboli $\{u, v\}$ je hranou grafu G_0 právě tehdy, když není hranou grafu V.

Definice 2. Graf se nazývá *k-regulární*, pokud má všechny vrcholy stupně k.

Věta 3. *Pro každý graf* $G(V, E)$ *platí* $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, *kde* $\deg(v)$ *označuje stupeň vrcholu* v*.*

Jako důsledek dostáváme, že každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

Definice 4. Graf se nazýva *bipartitní*, pokud můžeme rozdělit jeho vrcholy do dvou disjunktních množin tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana.

Úloha 1. Ukažte, že když G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak potom obsahuje také nějaký lichý cyklus jako indukovaný podgraf.

Úloha 2. Ukažte, že pokud graf neobsahuje cestu na čtyřech vrcholech $P4$ ani cyklus na třech vrcholech C_3 jako indukovaný podgraf, pak je bipartitní.

Úloha 3. Dokažte, že doplněk nesouvislého grafu je nutně souvislý.

Úloha 4. Ukažte, že pokud má $2k$-regulární graf $G(V, E)$ sudý počet hran, tak k nebo $|V|$ je sudé.

Úloha 5. Ukažte, že každý graf s $m \geq 2$ hranami má bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.

Úloha 6. Ukažte, že graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje lichý cyklus jako podgraf.