Úlohy ke cvičení

Definice 1. Skóre grafu G je posloupnost stupňů jeho vrcholů.

Věta 2. *Nechť $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je posloupnost přirozených čísel. Předpokládejme, že $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$, a označme symbolem D' posloupnost $(d'_1, d'_2, \ldots, d'_{n-1})$, kde*

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n, \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n. \end{cases}$$

Potom D je skóre grafu právě tehdy, když D' je skóre grafu.

Definice 3. Buď $G = (V, E)$ graf, pak jeho doplněk je graf $G_0 = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$, neboli $\{u, v\}$ je hranou grafu G_0 právě tehdy, když není hranou grafu V.

Definice 4. Uzavřený sled $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$ v grafu G je *eulerovský*, pokud se v něm každá hrana grafu G vyskytuje právě jednou a každý vrchol alespoň jednou. Graf se nazývá *eulerovský*, pokud v něm existuje eulerovský sled.

Věta 5. *Graf je eulerovský právě tehdy, když neobsahuje žádný vrchol lichého stupně.*

Úloha 1. Ověřte, zdali je posloupnost $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$ skóre grafu. Pokud ano, sestrojte graf, který má takové skóre.

Úloha 2. Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Úloha 3. Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.