

## Úlohy ke cvičení

**Definice 1.** Graf  $G = (V, E)$  je dvojice, která sestává z množiny vrcholů  $V$  a z množiny hran  $E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{u, v\}; u, v \in V, u \neq v\}$ .

**Definice 2.** Graf  $G = (V_G, E_G)$  je izomorfní grafu  $H = (V_H, E_H)$ , pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení  $f: V_G \rightarrow V_H$  takové, že  $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_H$ .

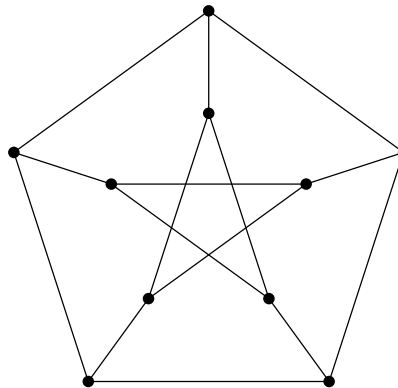
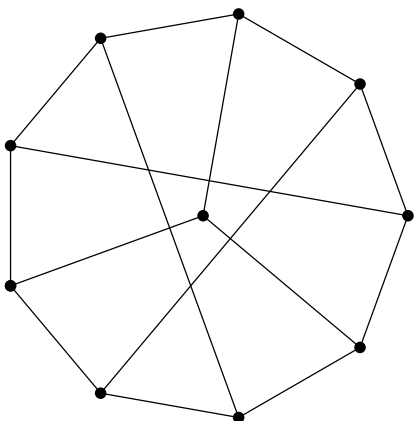
**Definice 3.** Buď  $G = (V, E)$  graf, pak jeho doplněk je graf  $G_0 = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ , neboli  $\{u, v\}$  je hranou grafu  $G_0$  právě tehdy, když není hranou grafu  $G$ .

**Úloha 1.** Dokažte, že platí následující odhady kombinačního čísla  $\binom{2n}{n}$ .

$$\text{a) } \frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$$

$$\text{b) } \prod_{\substack{n < p \leq 2n \\ p \text{ je prvočíslo}}} p \leq \binom{2n}{n}$$

**Úloha 2.** Nalezněte izomorfismus grafů na obrázku:



**Úloha 3.** Kolik existuje grafů na  $n$  vrcholech bez izolovaných vrcholů?

*Pozn.: Vrchol je izolovaný, pokud nepatří do žádné hrany.*

**Úloha 4.** Kolik existuje rozdělení do dvojic ve skupině  $2n$  lidí?

*Neboli kolik existuje perfektních párování v úplném grafu?*

**Úloha 5.** Najděte nějaké grafy, které jsou izomorfní svým doplňkům.

**Úloha 6.** Najděte příklad dvou neizomorfních grafů (dvou stromů, stromu a grafu, co není strom) se stejným skóre.

**Úloha 7.** Existuje bipartitní graf s aspoň 5 vrcholy, jehož doplněk je také bipartitní?