Úlohy ke cvičení

Definice 1. Buď A konečná množina a $\pi\colon A \to A$ permutace na množině A (tj. vzájemně jednoznačné zobrazení). Řekneme, že π má *pevný bod*, pokud existuje $a \in A$ takové, že $\pi(a) = a$. Počet permutací bez pevného bodu na n-prvkové množině pak značíme š(n).

Věta 2 (Princip inkluze a exkluze)**.** *Nechť $A_1, \dots A_n$ jsou konečné množiny. Pak platí*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

Úloha 1. Sečtěte:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\binom{n}{2}$

Úloha 2. Kolik je existuje dvojic (A, B) takových, že $A \subseteq B \subseteq \{1, \dots, n\}$?

Úloha 3. Dokažte vztah

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1.$$

Úloha 4. Na plese je n párů. Kolik je rozdělení do tanečních dvojic takových, že žádný pár netančí spolu?

Úloha 5. Určete počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.

Úloha 6. Určete počet surjektivních zobrazení z m-prvkové množiny na n-prvkovou množinu.

Můžeme na základě toho určit počet ekvivalencí na $n-$prvkové množině?