Úlohy ke cvičení

Věta 1 (Binomická věta)**.** $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Věta 2 (Multinomická věta)**.**

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_1,k_2,\ldots,k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m},$$

kde $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$.

Úloha 1. Kolik členů má rozvoj $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ podle multinomické věty?

Úloha 2. Z n předmětů vybíráme k. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Výběry	Záleží na pořadí (variace)	Nezáleží na pořadí (kombinace)
bez opakování		
s opakováním		

Úloha 3. Dokažte kombinatorickou úvahou:

a) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

d) $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

e) $\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

f) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Úloha 4. Sečtěte:

a) $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$

Úloha 5. Kolik existuje permutací n-prvkové množiny s jedním cyklem?