Úlohy ke cvičení

Definice 1. Relace na množině X se nazývá

- *ekvivalence*, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní,
- *(částečné) uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Definice 2. Buď $(X, \preceq)$ částečné uspořádání. Prvek $a \in X$ se nazývá

- *největší prvek*, pokud pro každé $x \in X$ platí $x \preceq a$,
- *maximální prvek*, pokud $a \preceq x$ implikuje $x = a$. Neboli neexistuje žádné x, které by bylo "nad" a v tomto uspořádání.

Analogicky definujeme *nejmenší* a *minimální prvek*.

Definice 3. Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Prvek $a \in X$ se nazývá *horní mez* množiny M, pokud pro všechna $m \in M$ platí $m \preceq a$. Nejmenší horní mez (pokud existuje) se nazývá *supremum*. Analogicky definujeme *dolní mez* a *infimum*.

Definice 4. Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Pak M se nazývá

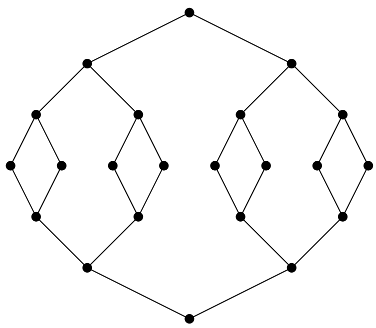
- *řetězec*, pokud pro každé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \preceq m_2$ nebo $m_2 \preceq m_1$. Neboli každé dva prvky z M jsou porovnatelné.
- *Antiřetězec*, pokud pro každé dva různé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \not\preceq m_2$ ani $m_2 \not\preceq m_1$. Neboli každé dva různé prvky z M jsou neporovnatelné.

Věta 5. *Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná konečná množina. Pak platí:*

- *Řetězec $\{r_1, \dots, r_n\} \subseteq X$ je nejdelší právě tehdy, když existuje n antiřetězců $A_1, \dots, A_n \subseteq X$, které pokrývají X, tj. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$.*
- *Antiřetězec $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq X$ je největší právě tehdy, když existuje m řetězců $R_1, \dots, R_m \subseteq X$, které pokrývají X, tj. $\bigcup_{k=1}^{m} R_k = X$.*

Důkaz. Pro naše účely stačí jen jedna implikace. Pokud by řetězec $\{r_1, \dots, r_n\}$ nebyl nejdelší, musel by existovat řetězec $\{r'_1, \dots, r'_{n+1}\}$ délky $n+1$. Protože máme n antiřetězců, které pokrývají X, musí nutně jeden z těchto antiřetězců obsahovat alespoň 2 prvky z řetězce $\{r'_1, \dots, r'_{n+1}\}$ délky $n+1$. To je ale spor, protože všechny prvky v řetězci jsou porovnatelné, ale všechny prvky v antiřetězci jsou neporovnatelné. $\square$

Úloha 1. U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký nejdelší řetězec a největší antiřetězec. Zdůvodněte, proč nelze najít delší, resp. větší.

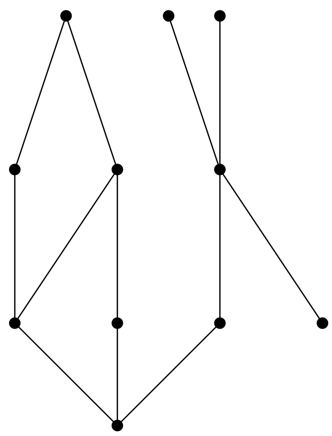


Úloha 2. a) Rozhodněte, zdali v každém konečném a neprázdném částečném uspořádání musí každý nejdelší řetězec protínat antiřetězec tvořený maximálními prvky.

b) Najděte uspořádání, ve kterém nejdelší řetězec neprotíná každý největší antiřetězec.

c) Najděte uspořádání, ve kterém je unikátní nejdelší řetězec R, unikátní největší antiřetězec A a zároveň se R a A neprotínají.

Úloha 3. Pro uspořádání zadané následujícím Hasseho diagramem rozhodněte, zdali má



a) největší prvek,

b) nejmenší prvek,

c) maximální prvek,

d) minimální prvek.

e) Má každá podmnožina v tomto uspořádání supremum a infimum?

f) Má prázdná množina v tomto uspořádání supremum? Čemu případně odpovídá?

Úloha 4. Najděte příklad lineárně uspořádané množiny s nejmenším a největším prvkem, ve které existuje podmnožina, která nemá supremum ani infimum.

Úloha 5. Čemu odpovídá supremum a infimum v

a) uspořádaní dělitelností na přirozených číslech? Neboli v $(\mathbb{N}, \backslash)$.

b) uspořádání inkluzí na potenční množině množiny X? Neboli v $(P(X), \subseteq)$.