Úlohy ke cvičení

Definice 1. Jako *relaci* R nazveme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $X \times Y$. Neboli $R \subseteq X \times Y$. Pokud $X = Y$, pak o R hovoříme jako o *relaci na* X. Místo $(x, y) \in R$ často píšeme xRy. Relací R^{-1} rozumíme $R^{-1} = \{(x, y); (y, x) \in R\}$.

Definice 2. Relace R na množině X je:

- *reflexivní*, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx,
- *symetrická*, pokud xRy implikuje yRx,
- *antisymetrická*, pokud xRy a yRx implikuje $x = y$,
- *tranzitivní*, pokud xRy a yRz implikuje xRz.

Definice 3. Mějme relace $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$. Pak *složení* relací R, S je relace $R \circ S \subseteq X \times Z$ definovaná následovně: $xR \circ Sz$ právě tehdy, když existuje $y \in Y$ takové, že xRy a zároveň ySz.

Definice 4. Relace $f \subseteq X \times Y$ se nazývá *zobrazení*, pokud pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ takové, že xfy. Takové y značíme $f(x)$. Zobrazení pak značíme $f\colon X \to Y$.

Definice 5. Zobrazení $f\colon X \to Y$ se nazývá

- *prosté (injektivní)*, pokud $f(x_1) = f(x_2)$ implikuje $x_1 = x_2$,
- *na (surjektivní)*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$,
- *vzájemně jednoznačné (bijektivní)*, pokud je prosté a na.

Úloha 1. Zjistěte, které z následujících podmínek nejsou ekvivalentní podmínce $A \subseteq B$. Pokuste se ji upravit tak, aby ekvivalence platila a to pokud možno co nejmenším zásahem.

a) $A \setminus B = \emptyset$

b) $A \cup B = B$

c) $A \cap B = A$

d) $\overline{A} \setminus B \subseteq \overline{B}$

e) $A \cap \overline{B} = \emptyset$

f) $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

Úloha 2. Rozhodněte, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní a antisymetrické.

a) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$

b) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (c, c)\}$

c) $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$,

d) $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $R = \{(x, y) : nsd(x, y) = 1\}$, neboli x a y jsou nesoudělná.