

Úlohy ke cvičení

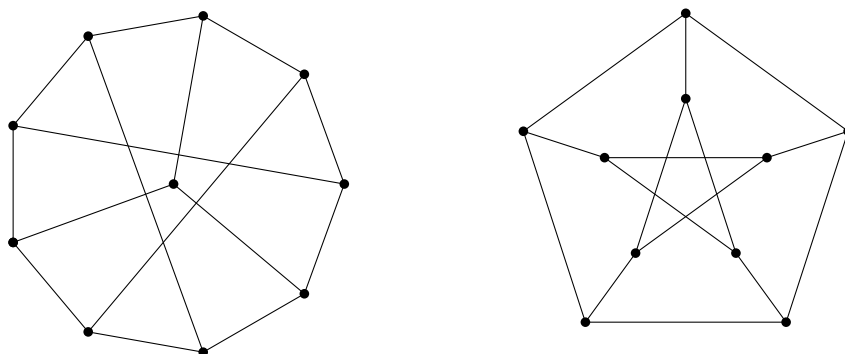
Věta 1. *Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení $K_{3,3}$ ani K_5 jako podgraf.*

Věta 2. *Je-li $G = (V, E)$ rovinný graf s alespoň 3 vrcholy, pak $|E| \leq 3|V| - 6$. Pokud navíc G neobsahuje trojúhelník jako podgraf, pak platí $|E| \leq 2|V| - 4$.*

Věta 3. *Bud' $G = (V, E)$ rovinný graf a s označuje počet jeho stěn. Pak platí $|V| - |E| + s = 2$.*

Definice 4. Pro graf $G = (V, E)$ a přirozené číslo k nazveme zobrazení $b: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ *obarvením grafu G pomocí k barev*, pokud pro každé dva vrcholy $u, v \in V$ platí $\{u, v\} \in E \implies b(u) \neq b(v)$. Barevnost grafu G , kterou značíme $\chi(G)$, je pak minimální počet barev potřebný k obarvení G .

Úloha 1. Ukažte, že graf na obrázku není rovinný.



Úloha 2. Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinný graf bez trojúhelníku.

Úloha 3. Ukažte, že duál eulerovského rovinného grafu je bipartitní.

Úloha 4. V zábavném pořadu *Let's Make a Deal* nabízel moderátor Monty Hall výhru pod následujícími pravidly: Výhra, automobil, je schovaná za jedněmi ze tří dveří. Za zbylými dvěma je cena útěchy, koza. Hráč nejprve na některé dveře ukáže. Moderátor, který ví, kde se skrývá výhra, otevře z ostatních dvou dveří ty, za kterými výhra není. V této situaci má hráč otevřít jedny ze zbylých dvou dveří, aby dostal, co se za nimi skrývá.

Je pro hráče výhodné změnit názor a otevřít jiné dveře, než na které původně ukázal?