Úlohy ke cvičení

Věta 1. *Pro každý graf* $G(V, E)$ *platí* $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, *kde* $\deg(v)$ *označuje stupeň vrcholu* v.

Jako důsledek dostáváme, že každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

Definice 2. Graf se nazýva *bipartitní*, pokud můžeme rozdělit jeho vrcholy do dvou disjunktních množin tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana.

Definice 3. Graf se nazývá *strom*, pokud je souvislý a neobsahuje cyklus jako podgraf.

Kostra grafu je jeho podgraf na všech jeho vrcholech, který je stromem.

Úloha 1. Ukažte, že každý graf s $m \geq 2$ hranami má bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.

Úloha 2. Ukažte, že graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje lichý cyklus jako podgraf.

Úloha 3. Jak pomocí mocnění matice sousednosti určíme počet čtyřcyklů v grafu?