# Úlohy ke cvičení

**Definice 1.** Skóre grafu $G$ je posloupnost stupňů jeho vrcholů.

**Věta 2.** *Nechť $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je posloupnost přirozených čísel. Předpokládejme, že $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$, a označme symbolem $D'$ posloupnost $(d'_1, d'_2, \ldots, d'_{n-1})$, kde*

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n, \\ d_i - 1 & \text{pro } i \ge n - d_n. \end{cases}$$

*Potom $D$ je skóre grafu právě tehdy, když $D'$ je skóre grafu.*

**Definice 3.** Buď $G = (V, E)$ graf, pak jeho doplněk je graf $G_0 = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$, neboli $\{u, v\}$ je hranou grafu $G_0$ právě tehdy, když není hranou grafu $V$.

**Definice 4.** Uzavřený sled $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$ v grafu $G$ je *eulerovský*, pokud se v něm každá hrana grafu $G$ vyskytuje právě jednou a každý vrchol alespoň jednou. Graf se nazývá *eulerovský*, pokud v něm existuje eulerovský sled.

**Věta 5.** *Graf je eulerovský právě tehdy, když neobsahuje žádný vrchol lichého stupně.*

**Definice 6.** Graf se nazýva *bipartitní*, pokud můžeme rozdělit jeho vrcholy do dvou disjunktních množin tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana.

---

**Úloha 1.** Ověřte, zdali je posloupnost $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$ skóre grafu. Pokud ano, sestrojte graf, který má takové skóre.

**Úloha 2.** Ukažte, že když G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak potom obsahuje také nějaký lichý cyklus jako indukovaný podgraf.

**Úloha 3.** Dokažte, že doplněk nesouvislého grafu je nutně souvislý.

**Úloha 4.** Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

**Úloha 5.** Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

**Úloha 6.** Ukažte, že každý graf s $m \ge 2$ hranami má bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.

**Úloha 7.** Ukažte, že graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje lichý cyklus jako podgraf.