Úlohy ke cvičení

Definice 1. Buď A konečná množina a $\pi\colon A \to A$ permutace na množině A (tj. vzájemně jednoznačné zobrazení). Řekneme, že π má *pevný bod*, pokud existuje $a \in A$ takové, že $\pi(a) = a$. Počet permutací bez pevného bodu na n-prvkové množině pak značíme $\check{s}(n)$.

Věta 2 (Princip inkluze a exkluze)**.** *Nechť $A_1, \dots A_n$ jsou konečné množiny. Pak platí*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Úloha 1. Dokažte kombinatorickou úvahou:

a) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

d) $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

e) $\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

f) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Úloha 2. Sečtěte:

a) $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$

Úloha 3. Kolik existuje permutací n-prvkové množiny s právě jedním cyklem?

Úloha 4. Dokažte vztah

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \dots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1.$$

Úloha 5. Určete počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.

Úloha 6. Určete počet surjektivních zobrazení z m-prvkové množiny na n-prvkovou množinu.