

Úlohy ke cvičení

Věta 1 (Binomická věta). $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Věta 2 (Multinomická věta).

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_m=n \\ k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m},$$

$$\text{kde } \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Úloha 1. Kolik členů má rozvoj $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ podle multinomické věty?

Úloha 2. Z n předmětů vybíráme k . Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Výběry	Záleží na pořadí (variace)	Nezáleží na pořadí (kombinace)
bez opakování		
s opakováním		

Úloha 3. Dokažte kombinatorickou úvahou:

a) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

d) $\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

e) $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

c) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

f) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$

Úloha 4. Sečtěte:

a) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$

Úloha 5. Kolik existuje permutací n -prvkové množiny s jedním cyklem?