

## Úlohy ke cvičení

**Definice 1.** Relace na množině  $X$  se nazývá

- *ekvivalence*, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní,
- (*částečné*) *uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

**Definice 2.** Buď  $(X, \preceq)$  částečné uspořádání. Prvek  $a \in X$  se nazývá

- *největší prvek*, pokud pro každé  $x \in X$  platí  $x \preceq a$ ,
- *maximální prvek*, pokud  $a \preceq x$  implikuje  $x = a$ . Neboli neexistuje žádné  $x$ , které by bylo “nad”  $a$  v tomto uspořádání.

Analogicky definujeme *nejmenší* a *minimální prvek*.

**Definice 3.** Buď  $(X, \preceq)$  částečně uspořádaná množina a  $M \subseteq X$  její podmnožina. Prvek  $a \in X$  se nazývá *horní mez* množiny  $M$ , pokud pro všechna  $m \in M$  platí  $m \preceq a$ . Nejmenší horní mez (pokud existuje) se nazývá *supremum*. Analogicky definujeme *dolní mez* a *infimum*.

**Definice 4.** Buď  $(X, \preceq)$  částečně uspořádaná množina a  $M \subseteq X$  její podmnožina. Pak  $M$  se nazývá

- *řetězec*, pokud pro každé  $m_1, m_2 \in M$  platí  $m_1 \preceq m_2$  nebo  $m_2 \preceq m_1$ . Neboli každé dva prvky z  $M$  jsou porovnatelné.
- *Antiřetězec*, pokud pro každé dva různé  $m_1, m_2 \in M$  platí  $m_1 \not\preceq m_2$  ani  $m_2 \not\preceq m_1$ . Neboli každé dva různé prvky z  $M$  jsou neporovnatelné.

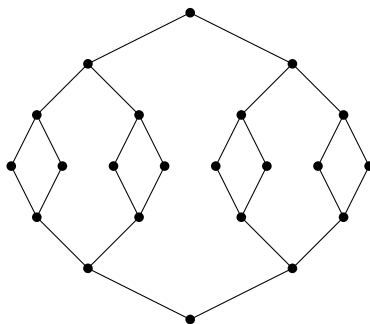
**Věta 5.** Buď  $(X, \preceq)$  částečně uspořádaná konečná množina. Pak platí:

- Řetězec  $\{r_1, \dots, r_n\} \subseteq X$  je nejdelší právě tehdy, když existuje  $n$  antiřetězců  $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ , které pokrývají  $X$ , tj.  $\cup_{k=1}^n A_k = X$ .
- Antiřetězec  $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq X$  je největší právě tehdy, když existuje  $m$  řetězců  $R_1, \dots, R_m \subseteq X$ , které pokrývají  $X$ , tj.  $\cup_{k=1}^m R_k = X$ .

---

**Úloha 1.** Určete počet různých ekvivalencí na čtyřech prvcích.

**Úloha 2.** U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký nejdelší řetězec a největší antiřetězec. Zdůvodněte, proč nelze najít delší, resp. větší.

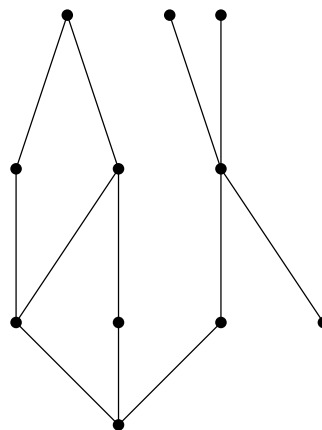


**Úloha 3.** a) Rozhodněte, zdali v každém konečném a neprázdném částečném uspořádání musí každý nejdelší řetězec protínat antiřetězec tvořený maximálními prvky.

- b) Najděte uspořádání, ve kterém nejdelší řetězec neprotíná každý největší antiřetězec.
- c) Najděte uspořádání, ve kterém je unikátní nejdelší řetězec  $R$ , unikátní největší antiřetězec  $A$  a zároveň se  $R$  a  $A$  neprotínají.

**Úloha 4.** Pro uspořádání zadané následujícím Hasseho diagramem rozhodněte, zdali má

- a) největší prvek,
- b) nejmenší prvek,
- c) maximální prvek,
- d) minimální prvek.
- e) Má každá podmnožina v tomto uspořádání supremum a infimum?



- f) Má prázdná množina v tomto uspořádání supremum? Čemu případně odpovídá?

**Úloha 5.** Najděte příklad lineárně uspořádané množiny s nejmenším a největším prvkem, ve které existuje podmnožina, která nemá supremum ani infimum.

**Úloha 6.** Čemu odpovídá supremum a infimum v

- a) uspořádání dělitelností na přirozených číslech? Neboli v  $(\mathbb{N}, \mid)$ .
- b) uspořádání inkluzí na potenční množině množiny  $X$ ? Neboli v  $(P(X), \subseteq)$ .