Úlohy ke cvičení

Definice 1. Jako *relaci* R nazveme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $X \times Y$. Neboli $R \subseteq X \times Y$. Pokud $X = Y$, pak o R hovoříme jako o *relaci na* X. Místo $(x, y) \in R$ často píšeme xRy. Relací R^{-1} rozumíme $R^{-1} = \{(x, y); (y, x) \in R\}$.

Definice 2. Relace R na množině X je:

- *reflexivní*, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx,
- *symetrická*, pokud xRy implikuje yRx,
- *antisymetrická*, pokud xRy a yRx implikuje $x = y$,
- *tranzitivní*, pokud xRy a yRz implikuje xRz.

Definice 3. Relace na množině X se nazývá

- *ekvivalence*, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní,
- *(částečné) uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Definice 4. Mějme relace $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$. Pak *složení* relací R, S je relace $R \circ S \subseteq X \times Z$ definovaná následovně: $xR \circ Sz$ právě tehdy, když existuje $y \in Y$ takové, že xRy a zároveň ySz.

Úloha 1. Rozhodněte, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní a antisymetrické.

a) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$

b) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (c, c)\}$

c) $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$,

d) $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $R = \{(x, y) : nsd(x, y) = 1\}$, neboli x a y jsou nesoudělná.

Úloha 2. Buďte R a S reflexivní relace na téže množině. Které z následujicích relací jsou také reflexivní?

a) $R \cup S$

b) $R \cap S$

c) $R \setminus S$

d) $R \oplus S$

e) $R \circ S$

f) R^{-1}

Úloha 3. Určete počet relací na n prvcích:

a) všech,

b) reflexivních,

c) symetrických,

d) antisymetrických.

Úloha 4. Určete počet různých ekvivalencí na čtyřech prvcích.